

## 付録 B

# 数値モデルの構築

付録 B では本研究で使用した数値モデルを構築する手順を記す。B.1 節はスペクトル法に関する基礎的な説明, B.2 節はスペクトル法による離散化の簡単な一例として非線形項を含む浅水方程式系の離散化方法を示している。B.3 節で実際に本研究で使用したブシネスク流体プリミティブ方程式系の離散化手順を説明する。B.4 節では角運動量を保存する形式の水平拡散項について記す。B.5 節は数値モデルを実装する上での要点を記す。B.6 節ではモデルのバグチェックのためのテスト方法を記す。そして, B.7 節では高拡散係数時の特殊な計算方法を説明する。

### B.1 スペクトル法基礎

ここではスペクトル法を用いた数値モデルを構築するにあたって必要な基礎を簡単に述べる。なお, この章の内容は石岡 (2004) を参考にしている。

#### B.1.1 関数展開による離散化

差分法では空間を有限個の格子点に分割するのに対して, スペクトル法では変数を有限個の関数の一次結合で表す。例えば, 次のような 2 変数関数  $u(x, t)$  の偏微分方程式の初期値境界値問題を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 1), \quad (\text{B.1})$$

$$\text{初期条件 } u = f(x), \quad \text{境界条件 } u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (\text{B.2})$$

このとき  $u$  は次のように展開される

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j(t) \phi_j(x). \quad (\text{B.3})$$

ただし、展開関数  $\phi_j(x)$  は境界条件を満たすように選ぶものとする。

$\phi_j(x)$  として境界条件を満たす滑らかな直交関数系を用いる。今の例の場合  $\phi_j(x) = \sin(j\pi x)$  ととれる。

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j(t) \sin(j\pi x). \quad (\text{B.4})$$

これを (B.1) に代入すれば

$$\sum_{j=1}^{J-1} \frac{\partial a_j}{\partial t} \sin(j\pi x) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j (j\pi)^2 (-\sin(j\pi x)), \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで、展開関数の直交関係を利用する。今の場合、 $\sin$  関数なので

$$\int_0^1 \sin(j\pi x) \sin(m\pi x) dx = \frac{1}{2} \delta_{j,m}, \quad (j, m = 1, 2, \dots, J-1), \quad (\text{B.6})$$

という直交関係を利用する。すなわち (B.5) の両辺に  $\sin(m\pi x)$  (重み関数と呼ばれる) をかけて、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲で積分すれば、次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} a_m(t) = -(m\pi)^2 a_m(t) \quad (m = 1, 2, \dots, J-1). \quad (\text{B.7})$$

$a_m$  に対する初期条件は、 $u(x, 0) = f(x)$  の両辺に  $\sin(m\pi x)$  をかけて積分することで

$$a_m(0) = 2 \int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) dx, \quad (\text{B.8})$$

となる。

## B.1.2 フーリエ級数を用いたスペクトル法

境界条件が周期境界条件の場合は展開関数としてフーリエ級数を使うことが多い。球面モデルでも、東西方向にはフーリエ級数展開が用いられる。

### 線形の場合

方程式が線形な場合として、ここでは次のような1次元線形移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = f(x), \quad \text{境界条件 } u(x, t) = u(x + 2\pi, t). \quad (\text{B.10})$$

まず、次のようにフーリエ級数展開をする。

$$u(x, t) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k(t) e^{ikx}. \quad (\text{B.11})$$

ここで、 $N$  は切断波数と呼ばれる。(B.11) を (B.9) に代入して、両辺に重み関数  $e^{-ikx}$  をかけて  $[0, 2\pi]$  の範囲で積分すれば、三角関数の直交性により、

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = +ik\hat{u}_k = 0, \quad (k = -N, \dots, N), \quad (\text{B.12})$$

となる。 $\hat{u}_k(t)$  の初期条件は、初期分布をフーリエ変換することにより、

$$\hat{u}_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (k = -N, \dots, N), \quad (\text{B.13})$$

となる。

### 非線形の場合 (直接法と変換法)

次に非線形の場合として1次元非線形移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = f(x), \quad \text{境界条件 } u(x, t) = u(x + 2\pi, t), \quad (\text{B.15})$$

非線形の時も、線形の場合と同様の操作をすることで

$$\frac{d\hat{u}_m}{dt} + \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N il\hat{u}_l\hat{u}_k\delta_{k+l,m} = 0, \quad (\text{B.16})$$

と、常微分方程式が得られ、数値的に解ける。しかし、上式の左辺第2項の計算には、 $(2N + 1)^2$  程度の計算量が必要となり、実用的でない。このように非線形項を直接計算する方法は直接法と呼ばれる。

直接法に対して、非線形項を実空間の格子点上で計算する方法は変換法と呼ばれる。(B.14) から (B.16) への変換に際しておこなっている操作は  $u$  をフーリエ級数展開して、両辺に重み関数  $e^{-ikx}$  をかけて、積分しているだけなので、次の関係が成立する。

$$\sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N il\hat{u}_l\hat{u}_k\delta_{k+l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \frac{\partial u}{\partial x} e^{-ikx} dx, \quad (\text{B.17})$$

つまり、上式の左辺は右辺の数値積分が正確ならば、それで代用できる。今、切断波数を  $N$  としているので右辺の積分の中身の最大波数は ( $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $e^{-ikx}$  の最大波数がそれぞれ  $N$  なので)  $3N$  になる。ゆえに、実空間上の分点を  $3N + 1$  以上とっていれば、数値積分で正確に評価できる。以下に変換法による非線形項の評価の手順をまとめる。

(1) 展開係数から分点上での値への変換 (離散フーリエ逆変換)

$$u_j = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k e^{ikx_j}, \quad (\text{B.18})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \sum_{k=-N}^N ik\hat{u}_k e^{ikx_j}. \quad (\text{B.19})$$

(2) 分点上での非線形項の評価

$$F_j = \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = u_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j. \quad (\text{B.20})$$

(3) 数値積分による非線形項の展開係数の計算 (離散フーリエ変換)

$$\hat{F}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F_j e^{-ikx_j}. \quad (\text{B.21})$$

ただし、( $j = 0, 1, \dots, J - 1$ ), ( $k = -N, \dots, N$ ) である。

この変換法の手順で離散フーリエ (逆) 変換の部分を高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) に置き換えることにより、直接法よりも演算回数を減らすことが可能になる。

### B.1.3 球面のスペクトル法

#### 球面調和関数展開

球面上で定義された関数  $g(\lambda, \mu)$  は次のように球面調和関数  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  で展開する.

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n s_n^m Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (\text{B.22})$$

ただし,  $\lambda$  は経度,  $\mu = \sin \phi$  はサイン緯度で,  $M$  は展開の切断波数である.

球面調和関数  $Y_n^m$  は, 球面上の水平ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}, \quad (\text{B.23})$$

の固有関数であり,

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.24})$$

の関係がある.  $Y_n^m$  はルジャンドル陪関数と三角関数を用いて以下で定義される.

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}. \quad (\text{B.25})$$

ここで,  $P_n^m$  は 2 に正規化されたルジャンドル陪関数

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n, \quad (\text{B.26})$$

であり, ルジャンドル陪関数は以下の直交関係を満たす.

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta_{nn'}. \quad (\text{B.27})$$

これより  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  は次の直交関係を満たすことが分かる.

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(Y_{n'}^{m'})^* d\mu d\lambda = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.28})$$

ただし,  $(\cdot)^*$  は共役複素数を表す. ルジャンドル陪関数の性質を利用することで, 次の漸化式を導くことができる.

$$(n+1)\varepsilon_n^m P_{n-1}^m - n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m = (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m. \quad (\text{B.29})$$

ただし

$$\varepsilon_n^m \equiv \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}}, \quad (\text{B.30})$$

である. この式はルジャンドル陪関数の微分の計算に使用される.

### ルジャンドル多項式とガウス・ルジャンドル積分公式

ルジャンドル陪関数  $P_n^m$  において  $m = 0$  のとき,  $P_n^0$  は  $\mu$  の  $n$  次多項式であり, ルジャンドル多項式と呼ばれる. このとき上付き文字を省略して  $P_n$  と表記する.

ルジャンドル多項式の性質から以下のガウス・ルジャンドルの積分公式が成立する.  $f(\mu)$  が  $2n - 1$  次以下の多項式であるとき,

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{k=1}^n w_k f(\mu_k). \quad (\text{B.31})$$

である. ここに  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) は  $P_n(\mu)$  の零点で (ガウス緯度と呼ばれる)

$$-1 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < 1, \quad (\text{B.32})$$

であり,

$$w_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_k)P_n'(\mu_k)} d\mu = \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)P_n'(\mu_k)}, \quad (\text{B.33})$$

はガウス重みと呼ばれる.

ガウス緯度は通常ニュートン法により数値的に求められる. まず, 初期値として次の近似根を与える.

$$\mu_{k,0} = \cos \frac{k - 1/4}{n + 1/2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{B.34})$$

そして,

$$\mu_{k,l+1} = \mu_{k,l} - \frac{P_n(\mu_{k,l})}{P_n'(\mu_{k,l})}, \quad (\text{B.35})$$

を用いて反復計算をおこない, 収束条件

$$|\mu_{k,l+1} - \mu_{k,l}| \leq \varepsilon, \quad (\text{B.36})$$

が満たされたときに計算を打ち切り,  $\mu_{k,l+1}$  をガウス緯度として採用する.  $P_n(\mu_{k,l})$  の計算には次の漸化式を用いる.

$$P_0(\mu_{k,l}) = 1, \quad (\text{B.37})$$

$$P_1(\mu_{k,l}) = \sqrt{3}\mu_{k,l}, \quad (\text{B.38})$$

$$P_n(\mu_{k,l}) = \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{n} \mu_{k,l} P_{n-1} - \frac{(n-1)\sqrt{2n+1}}{n\sqrt{2n-3}} P_{n-2}. \quad (\text{B.39})$$

また,  $P'_n(\mu_{k,l})$  の計算には

$$P'_n(\mu_{k,l}) = \frac{1}{1 - \mu_{k,l}^2} \left\{ n \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} P_{n-1} - n \mu_{k,l} P_n \right\}, \quad (\text{B.40})$$

を用いる.

### 球面調和関数変換

非線形項の評価などに変換法を用いる場合, 次の球面調和関数正変換を使用する.

$$s_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) \{Y_n^m(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda, \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\mu d\lambda. \quad (\text{B.42})$$

ただし,  $g(\lambda, \mu)$  は球面上の関数で非線形項に相当し,  $s_n^m$  が対応する展開係数になる. 数値計算ではこれを離散化する必要がある.

経度方向の格子点 ( $\lambda_k = 2\pi k/K, k = 0, 1, \dots, K$ ) を等間隔にとり, 緯度方向の格子点はガウス緯度  $\mu_j$  をとる. まず, フーリエ正変換の部分は離散フーリエ正変換 (実際には FFT) で計算し

$$G^m(\mu_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g(\lambda_k, \mu_j) e^{-im\lambda_k}, \quad (\text{B.43})$$

を得る. ルジャンドル正変換の部分はガウス・ルジャンドルの積分公式より

$$s_n^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J w_j G^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j), \quad (\text{B.44})$$

で計算する.  $w_j$  はガウス重みである.

逆変換も同様にして

$$G^m(\mu_j) = \sum_{n=|m|}^M s_n^m P_n^m(\mu_j), \quad (\text{B.45})$$

$$g(\lambda_k, \mu_j) = \sum_{k=0}^{K-1} G^m(\mu_j) e^{im\lambda_k}, \quad (\text{B.46})$$

により計算される.

## B.2 スペクトル法による非線形浅水方程式系の離散化

この節ではスペクトル法による離散化の一例として、非線形浅水方程式系の離散化方法を記す。なお、この節の内容は Satoh (2004) を参考にしている。

球面上の浅水方程式系は以下の通りである。ただし、非粘性で外力はないものとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{g}{a} \frac{\partial \eta}{\partial \phi}, \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\eta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\eta \cos \phi) = 0. \quad (\text{B.49})$$

ここで、 $\eta$  は表面変位である。

### B.2.1 渦度・発散方程式

渦度  $\zeta$ , 発散  $D$ , 流線関数  $\psi$ , 速度ポテンシャル  $\chi$  は

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (u \cos \phi)}{\partial \phi} = \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.50})$$

$$D = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} = \nabla_H^2 \chi. \quad (\text{B.51})$$

と書ける。ただし、球面上の水平のラプラシアン  $\nabla_H^2$  は

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (\text{B.52})$$

である。 $\zeta$  を用いると (B.47)(B.48) は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \quad (\text{B.54})$$

と変形できる。これは、移流項のベクトル不変形  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2$  の成分表示に他ならない。

ここで、 $\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (\text{B.54})}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial ((\text{B.53}) \cos \phi)}{\partial \phi}$  をすれば次の渦度方程式が得られる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)u \} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v \cos \phi \}. \quad (\text{B.55})$$



また,  $\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(\text{B.53})}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial((\text{B.54}) \cos \phi)}{\partial \phi}$  をすれば次の発散方程式が得られる.

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)v\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u \cos \phi\} - \nabla_H^2 \left( g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \quad (\text{B.56})$$

## B.2.2 球面上での取り扱いのための変換

球面上での取り扱いを容易にするために以下の  $U, V, \mu$  を導入する.

$$U = u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi. \quad (\text{B.57})$$

$\mu$  はサイン緯度と呼ばれる. (B.55) をこれらを用いて表すと

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega\mu)U\} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \{(\zeta + 2\Omega\mu)V\}, \quad (\text{B.58})$$

となり, (B.56) は

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega\mu)V\} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \{(\zeta + 2\Omega\mu)U\} - \nabla_H^2 \left( g\eta + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right), \quad (\text{B.59})$$

となる. さらに

$$A = (\zeta + 2\Omega\mu)U, \quad B = (\zeta + 2\Omega\mu)V, \quad (\text{B.60})$$

と書けば,  $\zeta, D, \eta$  の式は以下の通りに書ける.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu}, \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( g\eta + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right), \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(U\eta)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(V\eta)}{\partial \mu}. \quad (\text{B.63})$$

ジオポテンシャル  $\Phi = \eta g$  を導入し,  $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$  として, 平均値と偏差に分ける. すると (B.63) は

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(U\Phi')}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(V\Phi')}{\partial \mu} - \Phi' D, \quad (\text{B.64})$$

と書ける.  $\zeta, D, U, V$  は流線関数  $\psi$  と速度ポテンシャル  $\chi$  を用いて,

$$\zeta = \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.65})$$

$$D = \nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.66})$$

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (\text{B.67})$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu}, \quad (\text{B.68})$$

と表せる.

### B.2.3 スペクトル展開

東西方向の切断波数を  $M$  とする.  $\psi, \chi, \Phi'$  および  $\zeta, D$  を球面調和関数で展開する.

$$\psi(\lambda, \mu, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.69})$$

$$\chi(\lambda, \mu, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.70})$$

$$\Phi'(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \Phi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.71})$$

$$\zeta(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \zeta_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.72})$$

$$D(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M D_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (\text{B.73})$$

$\psi, \chi$  の展開には便宜上  $a^2$  を乗じている. このことと (B.52)(B.65)(B.66) により展開係数には以下の関係が成立する. \*1

$$\zeta_n^m = -n(n+1)\psi_n^m, \quad (\text{B.74})$$

$$D_n^m = -n(n+1)\chi_n^m. \quad (\text{B.75})$$

---

\*1 ラプラシアン の定義が (B.24) と今 (B.52) とで異なることに注意

$U, V$  も球面調和関数展開すると

$$U(\lambda, \mu, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} U_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.76})$$

$$V(\lambda, \mu, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} V_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.77})$$

となる. (B.25), (B.29) および (B.67) から (B.76) の右辺は,

$$\begin{aligned} & a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} U_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &= -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right\} \\ & \quad + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right\}, \\ &= a \sum_{m=-M}^M \left\{ -\sum_{n=|m|}^M \psi_n^m e^{im\lambda} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} P_n^m(\mu) + \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m P_n^m(\mu) \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{im\lambda} \right\}, \\ &= a \sum_{m=-M}^M \left\{ -\sum_{n=|m|}^M \psi_n^m e^{im\lambda} ((n+1)\varepsilon_n^m P_{n-1}^m - n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m) + im \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m Y_n^m \right\}, \end{aligned}$$

となる. この等式において  $Y_n^m$  の展開係数は両辺等しいはずなので,

$$U_n^m = -\psi_{n+1}^m - (n+2)\varepsilon_{n+1}^m + \psi_{n-1}^m (n-1)\varepsilon_n^m + im\chi_n^m, \quad (\text{B.78})$$

である.  $V$  も同様にして

$$V_n^m = im\psi_n^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \chi_{n+1}^m - (n-1)\varepsilon_n^m \chi_{n+1}^m, \quad (\text{B.79})$$

が得られる.

## B.2.4 非線形項の変換

非線形項  $A, B$  の離散フーリエ正変換は次で与えられる.

$$A_m(\mu_j) = \frac{1}{Ia} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} [\zeta(\lambda_i, \mu_j) + 2\Omega\mu_j] U(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{B.80})$$

$$B_m(\mu_j) = \frac{1}{Ia} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} [\zeta(\lambda_i, \mu_j) + 2\Omega\mu_j] V(\lambda_i, \mu_j). \quad (\text{B.81})$$

ルジャンドル正変換はガウス・ルジャンドルの積分公式を用いる. 渦度方程式 (B.61) と発散方程式 (B.62) の右辺の  $A, B$  からなる非線形項の展開係数をまとめて  $F_{\zeta n}^m, F_{Dn}^m$  とすれば

$$F_{\zeta n}^m = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \left[ imA_m(\mu_j)P_n^m(\mu_j) - B_m(\mu_j)(1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m(\mu_j)}{d\mu} \right], \quad (\text{B.82})$$

$$F_{Dn}^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \left[ imB_m(\mu_j)P_n^m(\mu_j) + A_m(\mu_j)(1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m(\mu_j)}{d\mu} \right], \quad (\text{B.83})$$

となる. ルジャンドル関数の  $\mu$  微分の項は (B.29) を用いて計算できる. 発散方程式の運動エネルギーの展開係数も同様に計算できて,

$$E_n^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \frac{U(\lambda_i, \mu_j)^2 + V(\lambda_i, \mu_j)^2}{2(1 - \mu_j^2)}, \quad (\text{B.84})$$

となる. (B.64) の右辺のフラックス項は (B.61) の右辺第 1, 2 項の  $A, B$  の中身の  $(\zeta + 2\Omega\mu)$  を  $\Phi'$  に替えたものと同じになることに注意すると,

$$\tilde{A}_m(\mu_j) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} \Phi'(\lambda_i, \mu_j) U(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{B.85})$$

$$\tilde{B}_m(\mu_j) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I e^{-im\lambda_i} \Phi'(\lambda_i, \mu_j) V(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{B.86})$$

としたとき, (B.64) のフラックス項の展開係数は次式で与えられる.

$$F_{\Phi' n}^m = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \left[ im\tilde{A}_m(\mu_j)P_n^m(\mu_j) - \tilde{B}_m(\mu_j)(1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m(\mu_j)}{d\mu} \right]. \quad (\text{B.87})$$

以上ですべての項がの展開係数が求まる．結局，展開係数の時間微分の式 (予報式) は

$$\frac{\partial \psi_n^m}{\partial t} = -\frac{1}{n(n+1)} F_{\zeta_n}^m, \quad (\text{B.88})$$

$$\frac{\partial \chi_n^m}{\partial t} = -\frac{1}{n(n+1)} F_{D_n}^m - \frac{1}{a^2} (\Phi_n'^m + E_n^m), \quad (\text{B.89})$$

$$\frac{\partial \Phi_n'^m}{\partial t} = F_{\Phi_n'}^m + \bar{\Phi} n(n+1) \chi_n^m. \quad (\text{B.90})$$

となる．

## B.2.5 計算の流れ

実際の計算の流れを図 B.1 に示す．

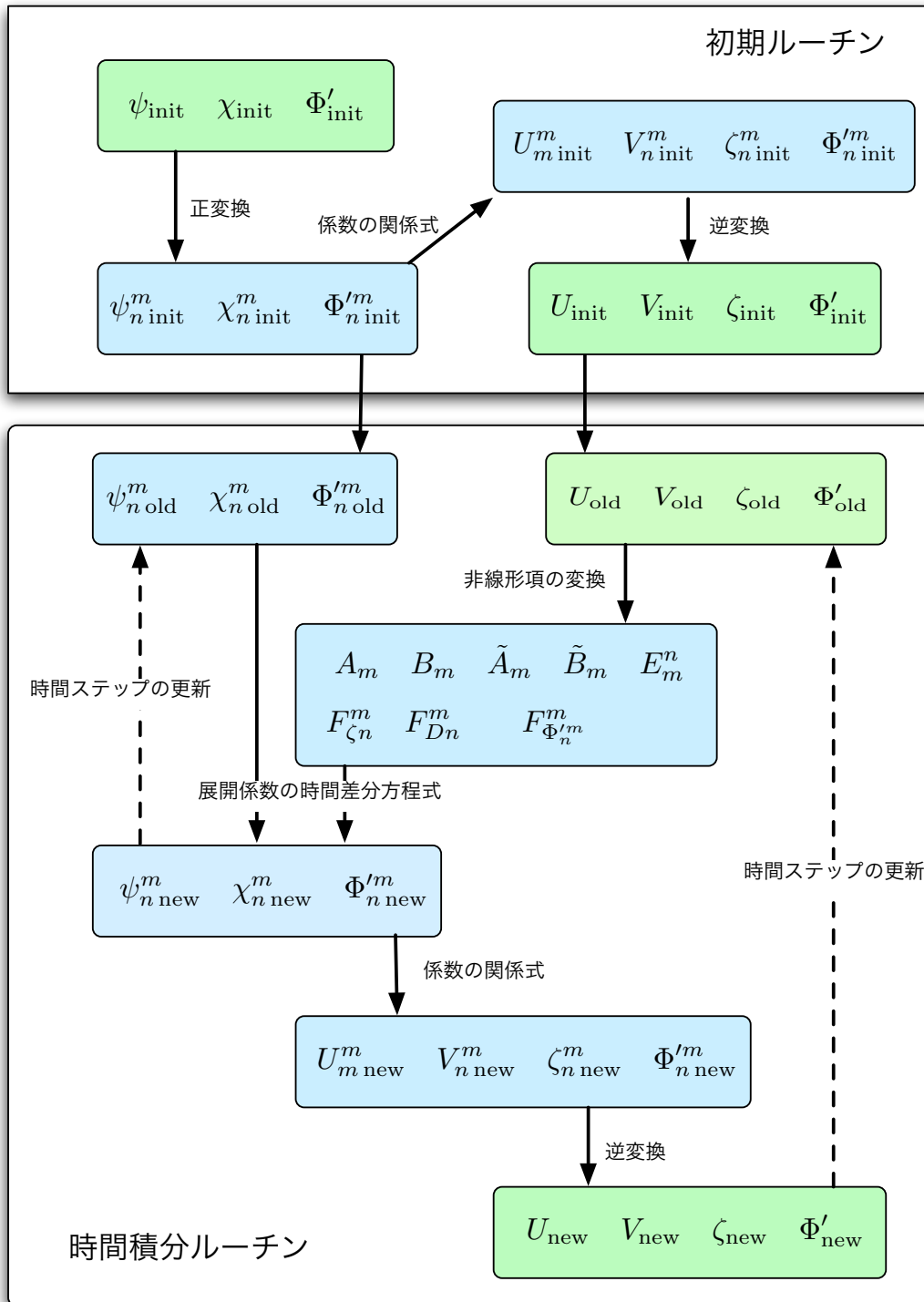


図 B.1 非線形浅水方程式系のスペクトル法での計算の流れ.

### B.3 ブシネスク流体プリミティブ方程式系の離散化

本節では球面上のブシネスク流体のプリミティブ方程式系を、水平方向にスペクトル法、鉛直方向には中央差分法を用いた離散化の方法を記す。

まず、方程式系を以下に記す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_u, \quad (\text{B.91})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_v, \quad (\text{B.92})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\Theta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\Theta \cos \phi) + \frac{\partial (w\Theta)}{\partial z} = \kappa_\Theta - \frac{(\Theta - \Theta_e)}{\tau}, \quad (\text{B.93})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\Theta}{\Theta_0}, \quad (\text{B.94})$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.95})$$

ここで、 $\nu_u, \nu_v$  は粘性・拡散項を、 $\kappa_\Theta$  は熱拡散の項を表す。  $\Phi = p/\rho_0$  で、 $\Theta_e$  はニュートン加熱/冷却の基準温位、 $\Theta_0$  は  $\Theta_e$  の全球平均である。上下端の境界条件は Held and Hou (1980) にならう

$$z = H \quad \text{で} \quad w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.96})$$

$$z = 0 \quad \text{で} \quad w = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \quad (\text{B.97})$$

とする。

以下の節では粘性・拡散がラプラシアンで表せ、鉛直と水平の粘性係数を  $\nu_V, \nu_H$  とする。ただし、運動量を球面ラプラシアンで拡散させる伝統的な方法は運動量の再分配の際に角運動量を保存せず、正確ではない。これに関しては次節 B.4 で説明する Becker (2001) の形式を用いることで、角運動量を保存する正しい水平拡散となることに留意したい。

#### B.3.1 トロイダル・ポロイダル展開の利用

速度ベクトル  $\mathbf{u}$  に関して (B.95) より  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  なので  $\mathbf{u}$  をトロイダル・ポロイダル展開して、

$$\mathbf{u} = -\nabla \times \psi \mathbf{k} + \nabla \times \nabla \times \chi \mathbf{k}, \quad (\text{B.98})$$

と表す (Chandrasekhar, 1981). ここで,  $\mathbf{k}$  は  $z$  成分の単位ベクトルである. 成分表示すれば

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right), \quad (\text{B.99})$$

$$v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right), \quad (\text{B.100})$$

$$w = -\frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \right\} = -\nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.101})$$

と書ける. すると鉛直渦度  $\zeta$  と水平発散  $D$  は

$$\zeta = \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.102})$$

$$D = \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_H^2 \chi), \quad (\text{B.103})$$

と書ける.

$$U = u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi, \quad (\text{B.104})$$

を導入して渦度・発散方程式を求めると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_H \nabla_H^2 \zeta + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (\text{B.105})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( \Phi + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right) + \nu_H \nabla_H^2 D + \nu_V \frac{\partial^2 D}{\partial z^2}, \quad (\text{B.106})$$

ただし,

$$A = (\zeta + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}, \quad B = (\zeta + 2\Omega\mu)V - w \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (\text{B.107})$$

である. (B.106) を両辺  $z$  微分して (B.94) を利用すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_H^2 \chi) &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( \frac{g}{\Theta_0} \Theta + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right] \right) \\ &\quad + \nu_H \nabla_H^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_H^2 \chi) + \nu_V \frac{\partial^4}{\partial z^4} (\nabla_H^2 \chi), \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

である.  $U, V$  を  $\psi, \chi$  で表すと

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right), \quad (\text{B.109})$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right), \quad (\text{B.110})$$

となる.



### B.3.2 スペクトル展開

東西方向の切断波数を  $M$  とする.  $\psi, \chi, \Theta$  および  $\zeta, D$  を球面調和関数で展開する.

$$\psi(\lambda, \mu, z, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.111})$$

$$\chi(\lambda, \mu, z, t) = a^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \chi_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.112})$$

$$\Theta(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \Theta_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.113})$$

$$\zeta(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \zeta_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.114})$$

$$D(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M D_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (\text{B.115})$$

(B.102), (B.103) の関係から

$$\zeta_n^m = -n(n+1)\psi_n^m, \quad (\text{B.116})$$

$$D_n^m(z, t) = -n(n+1) \frac{\partial \chi_n^m(z, t)}{\partial z}, \quad (\text{B.117})$$

である.  $U, V$  も球面調和関数展開すると

$$U(\lambda, \mu, z, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} U_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.118})$$

$$V(\lambda, \mu, z, t) = a \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} V_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (\text{B.119})$$

であり, (B.109), (B.110) および (B.29) より

$$U_n^m(z, t) = -\psi_{n+1}^m(z, t)(n+2)\varepsilon_{n+1}^m + \psi_{n-1}^m(z, t)(n-1)\varepsilon_n^m + im \frac{\partial \chi_n^m(z, t)}{\partial z}, \quad (\text{B.120})$$

$$V_n^m(z, t) = im\psi_n^m(z, t) + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \frac{\partial \chi_{n+1}^m(z, t)}{\partial z} - (n-1)\varepsilon_n^m \frac{\partial \chi_{n-1}^m(z, t)}{\partial z}, \quad (\text{B.121})$$

となる.

### B.3.3 非線形項の変換

非線形項の計算は科学数値計算ライブラリ ISPACK(石岡, 2005) を利用することを念頭に各項ごとに球面調和関数変換するほうが簡単である.

$A, B, \left[ \frac{U^2+V^2}{2(1-\mu^2)} \right], U\Theta, V\Theta, w\Theta$  の球面調和関数変換を  $A_n^m, B_n^m, E_n^m, (U\Theta)_n^m, (V\Theta)_n^m, (w\Theta)_n^m$  とする.

### B.3.4 鉛直方向の離散化

鉛直方向の格子の取り方にはチャーニー・フィリップス格子 (Charney and Phillips, 1953) やロレンツ格子 (Lorenz, 1960) などの取り方が, 一般のプリミティブ方程式を扱うときには用いられる. このような格子を用いるのは数値的な安定性が高くなるためである. しかし, ここでは取り扱っているの方程式系の形から  $\psi$  と  $\chi$  のスタッカード格子にする. つまり,  $\chi, w$  は整数格子 ( $k = 0, 1, 2, \dots, K$ ) で定義し,  $\psi, U, V, \Theta$  は半整数格子 ( $\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, \dots, (K-1) + \frac{1}{2}$ ) に定義する. (図 B.2)  $z$  軸を次の通りに離散化する (整

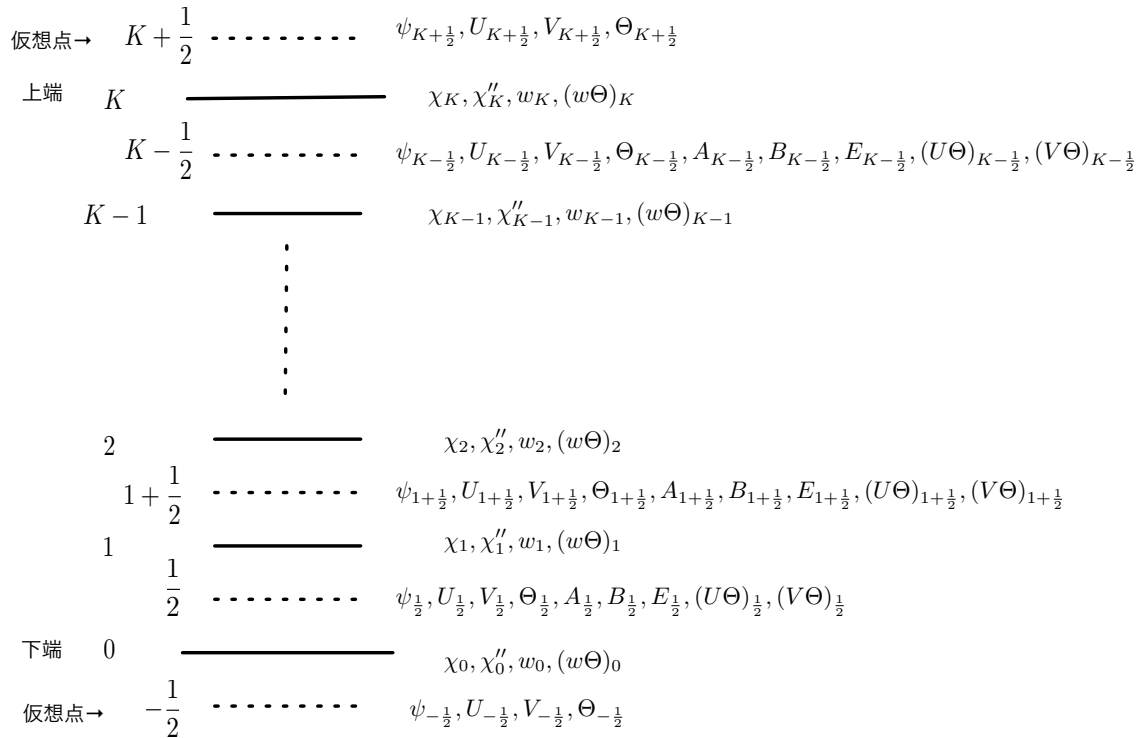


図 B.2 鉛直格子の取り方.  $\chi''$  は  $\chi$  の  $z^2$  階微分を表す.

数格子の場合).

$$z_k = k\Delta z, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K), \quad (\text{B.122})$$

ただし

$$\Delta z = \frac{H}{K}, \quad (\text{B.123})$$

である.  $z_0, z_K$  がそれぞれ下端と上端になる. 半整数格子は, 整数格子間の中点の高さにとる. 整数格子で定義された変数  $x$  の  $z$  微分は半整数格子上で求められ

$$\frac{\partial x(z_{k+\frac{1}{2}})}{\partial z} = \frac{x(z_{k+1}) - x(z_k)}{\Delta z}, \quad (\text{B.124})$$

で近似される. また, 簡単のため  $x_k \equiv x(z_k)$  と下付き文字で表す.

以上から展開係数で表した支配方程式は以下の通りになる.

$$\begin{aligned} -n(n+1) \frac{\partial \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m}{\partial t} = & \\ & - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left\{ (-im)A_{n,k+\frac{1}{2}}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m B_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m - (n-1)\varepsilon_n^m B_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m \right\} \\ & + \nu_H \frac{(-n)^2(n+1)^2}{a^2} \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \nu_V (-n)(n+1) \frac{\psi_{n,k+\frac{3}{2}}^m - 2\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{(\Delta z)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.125})$$

$$\begin{aligned} -n(n+1) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k}^m = & \\ & \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left\{ (-im) \frac{B_{n,k+\frac{1}{2}}^m - B_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right. \\ & \left. - (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \frac{A_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m - A_{n+1,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} + (n-1)\varepsilon_n^m \frac{A_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m - A_{n-1,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right\} \\ & + \frac{n(n+1)}{a^2} \left\{ \frac{g}{\Theta_0} \frac{\Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \Theta_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{2} + \frac{E_{n,k+\frac{1}{2}}^m - E_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right\} \\ & + \nu_H \frac{(-n)^2(n+1)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k}^m + \nu_V (-n)(n+1) \frac{\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k+1}^m - 2 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k}^m + \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,k-1}^m}{(\Delta z)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m}{\partial t} = & -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \left\{ (-im)[U\Theta]_{n,k+\frac{1}{2}}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m [V\Theta]_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m - (n-1)\varepsilon_n^m [V\Theta]_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m \right\} \\
& - \frac{[w\Theta]_{n,k+1}^m - [w\Theta]_{n,k}^m}{\Delta z} - \frac{(\Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m - \Theta_e)}{\tau} \\
& + \kappa_H \frac{(-n)(n+1)}{a^2} \Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \kappa_V \frac{\Theta_{n,k+\frac{3}{2}}^m - 2\Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m + \Theta_{n,k-\frac{1}{2}}^m}{(\Delta z)^2}, \tag{B.127}
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
A_{n,k+\frac{1}{2}}^m = & \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \\
& \times \left\{ \left( \zeta_{i,j,k+\frac{1}{2}} + 2\Omega\mu_j \right) U_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k}}{2} \right) \frac{V_{i,j,k+\frac{3}{2}} - V_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right\}, \tag{B.128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{n,k+\frac{1}{2}}^m = & \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \\
& \times \left\{ \left( \zeta_{i,j,k+\frac{1}{2}} + 2\Omega\mu_j \right) V_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k}}{2} \right) \frac{U_{i,j,k+\frac{3}{2}} - U_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right\}, \tag{B.129}
\end{aligned}$$

$$E_{n,k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \left\{ \frac{U_{i,j,k+\frac{1}{2}}^2 + V_{i,j,k+\frac{1}{2}}^2}{2(1-\mu^2)} \right\}, \tag{B.130}$$

$$(U\Theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) U_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Theta_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \tag{B.131}$$

$$(V\Theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) V_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Theta_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \tag{B.132}$$

$$(w\Theta)_{n,k}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) w_{i,j,k} \frac{\Theta_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \Theta_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2}. \tag{B.133}$$

### B.3.5 計算手順・上下端境界の取り扱い

今, ある時刻での仮想点\*2 ( $k = -\frac{1}{2}, K + \frac{1}{2}$ ) を含む全格子点上の全ての変数 (鉛直微分含む) の値が既知のときに,

- (1) (B.125), (B.127) (ただし  $k = 0, \dots, K - 1$ ) から次の時刻の  $\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \Theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m$  ( $k = 0, \dots, K - 1$ ) が求められる. また, (B.126)(ただし  $k = 1, \dots, K - 1$ ) より  $\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,k}^m$  ( $k = 1, \dots, K - 1$ ) が求められる.
- (2) 境界条件  $w(0) = w(H) = 0$  から,

$$\chi_{n,K}^m = \chi_{n,0}^m = 0, \quad (\text{B.134})$$

なので,

$$\frac{\chi_{n,k+1}^m - 2\chi_{n,k}^m + \chi_{n,k-1}^m}{(\Delta z)^2} = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,k}^m. \quad (\text{B.135})$$

ゆえに以下が成立する.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{n,1}^m \\ \chi_{n,2}^m \\ \chi_{n,3}^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_{n,K-1}^m \end{pmatrix} = (\Delta z)^2 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,1}^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,K-1}^m \end{pmatrix}. \quad (\text{B.136})$$

この連立一次方程式 (三重対角行列) を解くことで  $\chi_{n,k}^m$  ( $k = 1, \dots, K - 1$ ) が求められる.

- (3) 上端の境界条件  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$  は離散化すれば

$$U_{n,K-\frac{1}{2}}^m = U_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \quad V_{n,K-\frac{1}{2}}^m = V_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \quad \Theta_{n,K-\frac{1}{2}}^m = \Theta_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.137})$$

と書ける. ここで  $k = K + 1$  は仮想点である.  $\psi$  は

$$\psi_{n,K+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \zeta_{n,K+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \zeta_{n,K-\frac{1}{2}}^m = \psi_{n,K-\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.138})$$

$\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)$  は

$$\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right)_{n,K}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \left(\frac{\partial D_{n,K}^m}{\partial z}\right) = 0, \quad (\text{B.139})$$

\*2 仮想点とは半整数格子で定義された変数が, 整数格子上でに位置する上下境界での境界条件を満たすために導入する点 ( $k = -\frac{1}{2}, K + \frac{1}{2}$ ) である.

と書ける.

(4) 下端境界条件  $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{C}{\nu}U$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{C}{\nu}V$  は次の通りに離散化できる.

$$\frac{U_{\frac{1}{2}} - U_{-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = \frac{C}{\nu_V}U_0 = \frac{C}{\nu_V} \frac{U_{\frac{1}{2}} + U_{-\frac{1}{2}}}{2}. \quad (\text{B.140})$$

これを  $U_{-\frac{1}{2}}$  について解けば

$$U_{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{2\nu_V - C\Delta z}{2\nu_V + C\Delta z} \right) U_{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.141})$$

となる. 簡単のため

$$\alpha \equiv \left( \frac{2\nu_V - C\Delta z}{2\nu_V + C\Delta z} \right), \quad (\text{B.142})$$

としておく. よって下端境界条件は

$$U_{n,-\frac{1}{2}}^m = \alpha U_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad V_{n,-\frac{1}{2}}^m = \alpha V_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.143})$$

と書ける. これから  $\psi$  は

$$\psi_{n,-\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{-n(n+1)} \zeta_{n,-\frac{1}{2}}^m = \frac{\alpha}{-n(n+1)} \zeta_{n,\frac{1}{2}}^m = \alpha \psi_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.144})$$

であり,  $\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)$  は

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)_{n,0}^m &= \frac{1}{-n(n+1)} \left( \frac{\partial D_{n,0}^m}{\partial z} \right), \\ &= \frac{1}{-n(n+1)} \frac{D_{n,\frac{1}{2}}^m - D_{n,-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z}, \\ &= \frac{1}{-n(n+1)} \frac{D_{n,\frac{1}{2}}^m - \alpha D_{n,\frac{1}{2}}^m}{\Delta z}, \\ &= \frac{1}{-n(n+1)} \frac{(1-\alpha)}{\Delta z} D_{n,\frac{1}{2}}^m, \\ &= \frac{(1-\alpha)}{-n(n+1)\Delta z} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_H^2 \chi)_{n,\frac{1}{2}}^m, \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\Delta z} \frac{\chi_{n,1}^m - \chi_{n,0}^m}{\Delta z}, \\ &= \frac{(1-\alpha)}{(\Delta z)^2} \chi_{n,1}^m, \end{aligned} \quad (\text{B.145})$$

と書ける. また,  $\Theta$  に関しては上端と同様で

$$\Theta_{n,-\frac{1}{2}}^m = \Theta_{n,\frac{1}{2}}^m, \quad (\text{B.146})$$

である.

(5)  $\chi_{n,k}^m, \psi_{n,k}^m$  から  $U_{n,k}^m, V_{n,k}^m$  を求める式は (B.109), (B.110) より

$$U_{n,k+\frac{1}{2}}^m = -\psi_{n+1,k+\frac{1}{2}}^m (n+2)\varepsilon_{n+1}^m + \psi_{n-1,k+\frac{1}{2}}^m (n-1)\varepsilon_n^m + im \frac{\chi_{n,k+1}^m - \chi_{n,k}^m}{\Delta z}, \quad (\text{B.147})$$

$$V_{n,k+\frac{1}{2}}^m = im\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m \frac{\chi_{n+1,k+1}^m - \chi_{n+1,k}^m}{\Delta z} - (n-1)\varepsilon_n^m \frac{\chi_{n-1,k+1}^m - \chi_{n-1,k}^m}{\Delta z}, \quad (\text{B.148})$$

となる.

以上の境界条件を用いれば上下端 ( $k = 0, K$ ) および仮想点 ( $k = -\frac{1}{2}, K + \frac{1}{2}$ ) の値も求まり, 時間発展が記述できる (図 B.3).

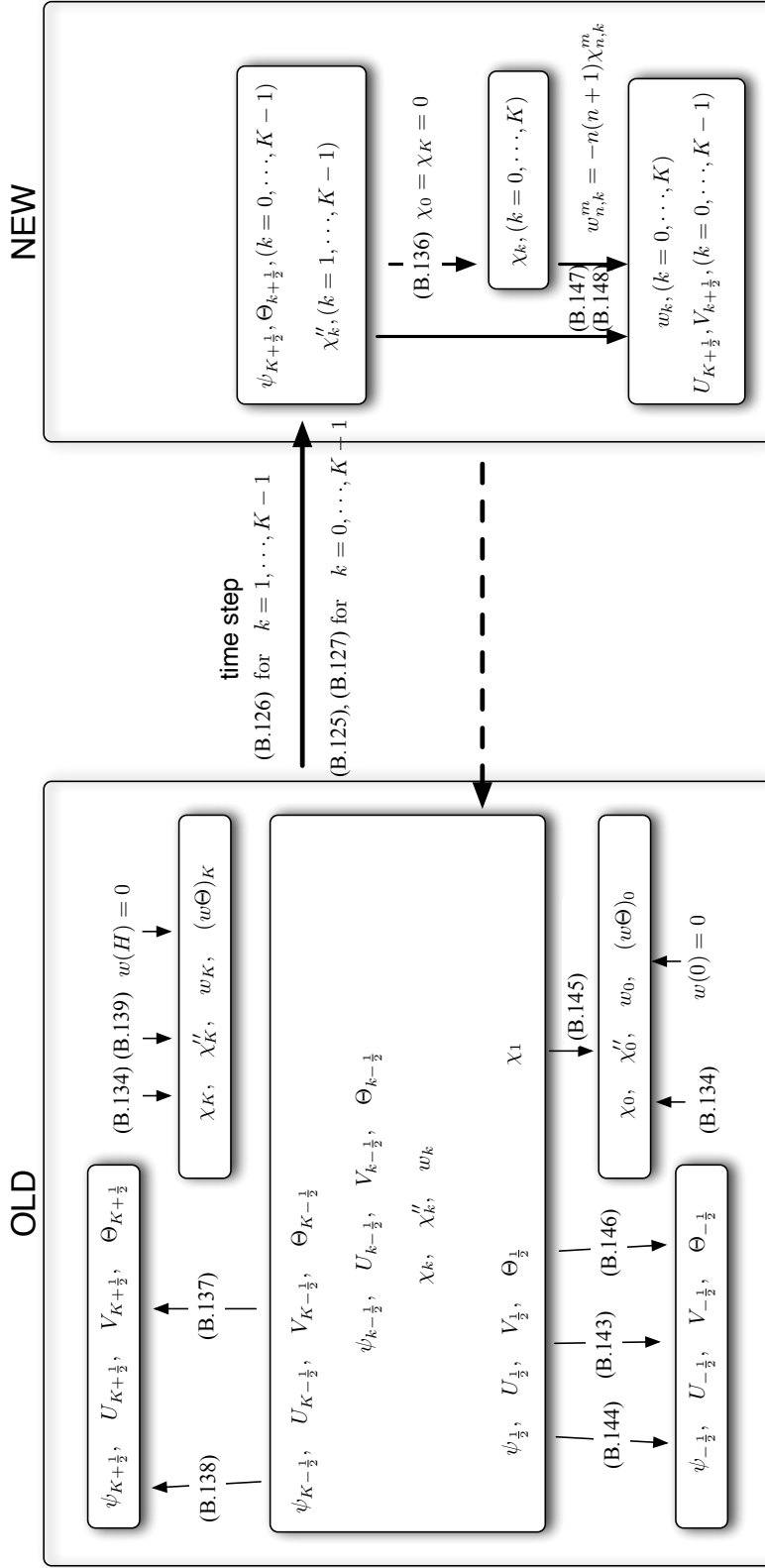


図 B.3 計算の流れ



## B.4 角運動量を保存する水平拡散

これまでは水平拡散として水平ラプラシアンを用いてきたが、これは Becker (2001) により、角運動量を正しく保存しない事が示されている。Becker (2001) による角運動量を保存する水平拡散項は以下の形で書かれる。

$$\mathbf{H}_\mu = \nu_H \left( \nabla_H^2 \mathbf{v}_\mu + \nabla \hat{D}_\mu + 2 \frac{\mathbf{v}_\mu}{a^2} \right). \quad (\text{B.149})$$

ただし  $\mu$  が  $\mu \geq 1$  のとき超粘性を、 $\mu = 0$  のとき物理的に意味のある通常の粘性を表している (前節までのサイン緯度の  $\mu$  ではないので注意)。また

$$\mathbf{v}_\mu = (-1)^\mu a^{2\mu} \nabla_H^{2\mu} \mathbf{v}, \quad (\text{B.150})$$

$$\hat{D}_\mu = \nabla \cdot \mathbf{v}_\mu, \quad (\text{B.151})$$

である。

これを渦度・発散方程式のスペクトル法における展開係数の予報式の形に直せば以下の形になる。

$$\frac{d\zeta_n^m}{dt} = \dots - \frac{\nu_H}{a^2} \left\{ [n(n+1)]^{1+\mu} - 2[n(n+1)]^\mu \right\} \zeta_n^m, \quad (\text{B.152})$$

$$\frac{dD_n^m}{dt} = \dots - \frac{\nu_H}{a^2} \left\{ 2[n(n+1)]^{1+\mu} - 2[n(n+1)]^\mu \right\} D_n^m. \quad (\text{B.153})$$

ここで、 $\mu = 0$ 、軸対称 ( $\partial/\partial\lambda = 0$ ) とすると、東西風  $u$  の運動方程式に表れる水平拡散項は

$$(\mathbf{H}_0)_\lambda = \nu_H \left\{ \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2} \right\} \quad (\text{B.154})$$

となる。また、南北風  $v$  の運動方程式に出てくるのは

$$(\mathbf{H}_0)_\phi = \nu_H \left\{ \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2} \right\} \quad (\text{B.155})$$

という形をとる。

式 (B.154) から  $(\mathbf{H}_0)_\lambda = 0$  になるのは

$$u = u_0 \cos \phi \quad (\text{B.156})$$

(ただし  $u_0$  は定数) のときである事が分かる。つまり、水平粘性項は東西風速場を剛体回転に近づけるように働くのである。

## B.5 実装

本節では B.3 節で導いた離散化した方程式を、実際に計算機のプログラムとして実装する上での要点を記す。必要なルーチンとそのために用いるライブラリは以下の 4 つである。なお、軸対称モデルの場合は、東西波数を  $m = 0$  のみとして、球面調和関数変換の代わりにルジャンドル変換を使用する。

- 球面調和関数変換 (ルジャンドル変換): ISPACK/SNPACK(LTPACK).
- 三重対角行列で表される連立一次方程式の解を求める: LAPACK/DGTTRF, DGTTRS (Anderson et al., 1999).
- 時間発展: 4 次のルンゲ・クッタ法を自作.
- データの入出力: gt4f90io.

### ISPACK/SNPACK(LTPACK)

ISPACK(Ishioka Scientific PACKage) は、主に簡単な流体方程式の数値計算に必要な基本的な道具 (スペクトル変換, 時間積分, IO, 等) をサブルーチン群としてまとめたものである。その中で SNPACK(LTPACK) は球面調和関数変換 (ルジャンドル変換) の正変換・逆変換および、緯度微分・経度微分を作用させた各変換を行うサブルーチンを提供してくれる。これを用いることで、 $\psi, \chi$  から  $U, V$  の計算が簡単に行える。

### LAPACK/DGTTRF, DGTTRS

LAPACK (Linear Algebra PACKage) は線形代数計算用ライブラリである。BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) ライブラリ上に構築されており、線形方程式や固有値問題を扱うことができる。OS や CPU に依存する最適化を BLASで行っているため、BLAS が提供されている計算機なら、特別に意識することなく最適性能が得られることが特徴。その中で DGTTRF は実三重対角行列  $A$  について  $LU$  分解を計算し、DGTTRS はこの  $LU$  分解を用いて、連立一次方程式  $A * X = B$  の解を計算する。

#### 4 次のルンゲ・クッタ法

4 次のルンゲ・クッタ法は時間発展計算に広く用いられている。常微分方程式  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  の時間発展は以下で表される (小国, 1997)。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{6} + \frac{\mathbf{k}_2}{3} + \frac{\mathbf{k}_3}{3} + \frac{\mathbf{k}_4}{6}, \quad (\text{B.157})$$

ただし

$$\mathbf{k}_1 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (\text{B.158})$$

$$\mathbf{k}_2 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n + dt/2, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_1/2), \quad (\text{B.159})$$

$$\mathbf{k}_3 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n + dt/2, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_2/2), \quad (\text{B.160})$$

$$\mathbf{k}_4 = dt \cdot \mathbf{f}(t_n + dt, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_3). \quad (\text{B.161})$$

#### gt4f90io

gt4f90io は gtool4 NetCDF 規約 (豊田 et al., 2006) に従った数値データの入出力ライブラリである。NetCDF 形式の読み書きを非常に容易に実現することが出来る。なお、NetCDF(Network Common Data Form) とは機種依存のない自己記述的 (座標軸, 物理量の名前, 単位, 作成者名等の情報を付加できる) データ形式である (Rew et al., 1997)。気象海洋業界で広く普及しており, NetCDF 形式を扱える解析・可視化用ソフトウェアが豊富なことが特徴。

## B.6 モデルテスト

離散化した通りに正しくソースコードを書けば、数値計算は問題なく実行可能となるが、書かれたソースコードはほぼ確実にバグを含んでいる。例え、コンパイルエラーがでなくなっても計算が正しく行われているかの確認が必要である。この節では、幾つかのテスト方法を紹介する。ここで取り扱う方程式系を再び以下に記す。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_H \nabla_H^4 \psi + \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \psi, \quad (\text{B.162})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \chi &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left( \frac{g}{\Theta_0} \Theta + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right] \right) \\ &\quad + \nu_H \nabla_H^4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \nu_V \frac{\partial^4}{\partial z^4} \nabla_H^2 \chi, \end{aligned} \quad (\text{B.163})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(U\Theta)}{\partial z} - \frac{1}{a} \frac{\partial(V\Theta)}{\partial \mu} - \frac{\partial(w\Theta)}{\partial z} \\ &\quad + \kappa_H \nabla_H^2 \Theta + \kappa_V \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\Theta - \Theta_e}{\tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.164})$$

ただし、

$$A = (\nabla_H^2 \psi + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (\text{B.165})$$

$$B = (\nabla_H^2 \psi + 2\Omega\mu)V + w \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (\text{B.166})$$

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right), \quad (\text{B.167})$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right), \quad (\text{B.168})$$

$$w = -\nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.169})$$

である。

### B.6.1 ロスビー波テスト：水平方向のチェック

上記の方程式系は非粘性、等温、順圧場のときに  $\psi$  で閉じる。つまり

$$\nu_H = \nu_V = 0, \quad \Theta = \Theta_e = \Theta_0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.170})$$

このとき方程式系は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi = \frac{1}{a^2} \left\{ \left( \nabla_H^2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \left( \nabla_H^2 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\}, \quad (\text{B.171})$$

となる. この方程式に対して

$$\psi = Y_n^m e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.172})$$

を代入する. ここで  $Y_n^m$  は球面調和関数である. すると以下の分散関係式が得られる.

$$\frac{\omega}{m} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}. \quad (\text{B.173})$$

つまり, 初期に与えた位相  $\psi = Y_n^m$  が, この位相速度で西進することを確認することで水平方向のチェックになる (図 B.4).

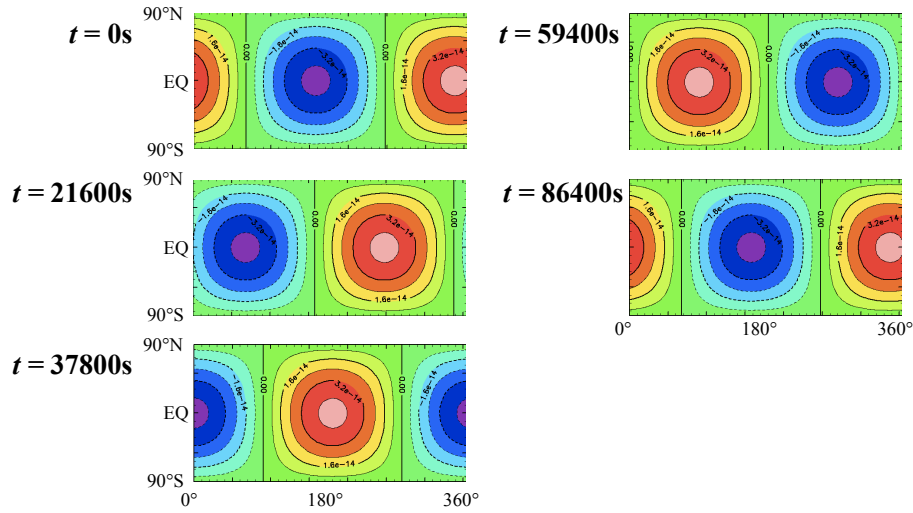


図 B.4 ロスビー波テスト.  $\psi = Y_1^1 e^{-i\omega t}$  の場合の  $\psi$ . すなわち位相速度は  $-\Omega$  で周期が 1 地球日 (day) = 86400s.

## B.6.2 重力波テスト: 鉛直方向のチェック

次は方程式系に対して, 基本場の温位勾配一定, 自転なし, 非粘性, 非拡散を仮定する.

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \text{一定}, \quad \Omega = \nu_H = \nu_V = \kappa_H = \kappa_V = 0. \quad (\text{B.174})$$

ここで  $\bar{\Theta}$  は基本温位場である. さらに, 基本場の  $\psi, \chi$  はゼロとし, 微小擾乱を与える. すると方程式系は線形化できて,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \chi = -\frac{g}{\Theta_0} \nabla_H^2 \Theta', \quad (\text{B.175})$$

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} = -w \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}, \quad (\text{B.176})$$

となる. ここで  $\Theta'$  は温度擾乱である. (B.175) を時間微分して (B.176) を代入すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_H^2 \chi = N^2 \nabla_H^2 \chi, \quad (\text{B.177})$$

が得られる. ただし  $N$  はブラント・バイサラ振動数で

$$N^2 \equiv \frac{g}{\Theta_0} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}, \quad (\text{B.178})$$

である. (B.177) に対して微小な  $\chi$  を

$$\chi = Y_n^m \sin(l\pi z/H) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.179})$$

で与えれば, 以下の分散関係式が得られる.

$$\omega^2 = \frac{N^2 n(n+1)}{a^2 l^2 \pi^2 / H^2}. \quad (\text{B.180})$$

つまり, 初期に与えた擾乱  $\chi = Y_n^m \sin(l\pi z/H)$  が上記の分散関係式を満たす振動数  $\omega$  で振動することを確認することで, 鉛直方向のチェックになる (図 B.5).

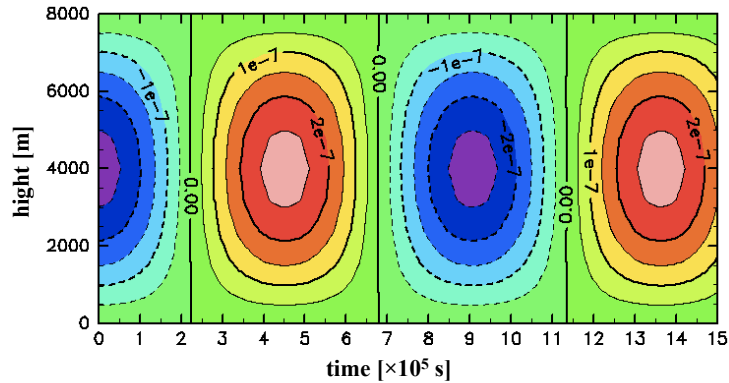


図 B.5 重力波テスト.  $m = n = l = 1, N^2 = 1.5 \times 10^{-4}$  の場合の  $\chi$ . すなわち周期は  $9.1 \times 10^5 \text{s}$ .

## B.7 高拡散係数時の数値計算法

数値モデルにおいて、拡散係数の値を大きくしていくと、強い拡散項の影響で早く定常に達することが予想される。しかし、実際は拡散係数を大きくすると CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件から時間刻み幅を小さくする必要があるため、結果として定常状態に達するまでに要する計算回数が多くなり、計算時間が増大する。

このような、解自体は急激に一定値に収束するが、陽的公式では刻み幅を十分に小さくしないと正しい解が得られない常微分方程式のことを硬い方程式 (**stiff equation**) と呼ぶ。この節では硬い方程式を効率的に数値計算するための一般的な解法を述べた後に、B.3 節のブシネスク流体プリミティブ方程式系に対して、この解法を実装する。

### B.7.1 硬い方程式の解法

以下のような線形常微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = -ax. \quad (\text{B.181})$$

ただし、 $a > 0$  である。これを通常の陽的オイラー法で差分化すると

$$x_{n+1} = (1 - a\Delta t)x_n, \quad (\text{B.182})$$

なので

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = |1 - a\Delta t|, \quad (\text{B.183})$$

となり、安定のためには  $\Delta t < a^{-1}$  を満たす必要がある。つまり  $a$  が大きくなるほど、時間刻み幅を小さくとらなければならない。

そこで、陰的公式を用いれば (B.181) は、

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + a\Delta t} x_n, \quad (\text{B.184})$$

と差分化される。ゆえに

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{1}{1 + a\Delta t} \right| < 1, \quad (\text{B.185})$$

となり、時間刻み幅を大きくとっても安定に計算できる。

今の場合、方程式が線形なので陰的公式で素直に解けたが、非線形で多変数の場合は時間ステップ毎に非線形の連立方程式を解かねばならず、演算回数が多くなってしまう。し

かし、方程式の硬さの原因が線形項にある場合は、陽的公式の形を書き換えて、硬さを回避できる場合がある。

次のような微分方程式を考える。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{B.186})$$

ここで  $A(t)\mathbf{x}(t)$  が線形項で  $A(t)$  は係数行列である。  $\mathbf{f}(t)$  は非斉次項、  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  が非線形項である。非線形項がなかった場合の解は、ある時刻  $s$  での解を  $\mathbf{x}(s)$  として

$$\mathbf{x}(t) = R(t, s)\mathbf{x}(s) + \int_s^t R(t, u)\mathbf{f}(u)du, \quad (\text{B.187})$$

で与えられる行列  $R(t, s)$  が存在する。  $R(t, s)$  は解核行列と呼ばれ、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t), \quad (\text{B.188})$$

に対する解を

$$\mathbf{x}(t) = R(t, s)\mathbf{x}(s), \quad (\text{B.189})$$

と記述する行列である。  $R(t, s)$  には以下の性質がある。

- (1)  $R(s, s) = I$ , (単位行列)
- (2)  $R(t, s)R(s, t) = I$ ,
- (3)  $R(t, s)^{-1} = R(s, t)$ ,
- (4)  $\frac{\partial R(t, s)}{\partial t} = A(t)R(t, s)$ ,
- (5)  $\frac{\partial R(t, s)}{\partial s} = -R(t, s)A(s)$ .

以上の性質を用いるとルンゲ・クッタ公式は以下で書かれる。\*3

$$\mathbf{x}(t+h) = L\left(t+h, t+\frac{h}{2}\right) \left[ L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) \left[ \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 \right] + \frac{1}{3}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right] + \frac{1}{3}\mathbf{k}_4, \quad (\text{B.190})$$

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t), \quad (\text{B.191})$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{g}\left(L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) \left[ \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 \right], t+\frac{h}{2}\right), \quad (\text{B.192})$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{g}\left(L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) [\mathbf{x}(t)] + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2, t+\frac{h}{2}\right), \quad (\text{B.193})$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{g}\left(L\left(t+h, t+\frac{h}{2}\right) \left[ L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) [\mathbf{x}(t)] + \mathbf{k}_3 \right], t+h\right), \quad (\text{B.194})$$

---

\*3 詳しい導出は石岡 (2004) 参照。



ただし

$$L(t, s)[\mathbf{x}(s)] = R(t, s)\mathbf{x}(s) + \int_s^t R(t, u)\mathbf{f}(u)du, \quad (\text{B.195})$$

である.

一般の  $A(t)$  に対して,  $R(t, s)$  を求めることは容易ではないが,  $A(t) = A$  すなわち定係数のときは具体的に計算できる.  $n$  次正方形行列  $A$  に対して

$$\exp(At) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad (\text{B.196})$$

とおき, これを  $At$  の指数関数と定義する. すると

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (\text{B.197})$$

の解核行列は

$$R(t, s) = \exp(A(t - s)), \quad (\text{B.198})$$

で与えられる. なぜなら

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \exp(A(t - s)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(t - s)^{k-1}}{k!} A^k, \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - s)^k}{k!} A^k, \\ &= A \exp(A(t - s)), \end{aligned}$$

だからである.

$\exp(At)$  は  $A$  が対角化可能なときには計算が容易になる. まず,  $A$  が対角行列のときは

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

とすれば

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

だから

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sum \frac{t^k}{k!} \lambda_2^k & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

である. 一方, 対角化可能な行列  $A$  は, ある正則行列  $T$ , 対角行列  $D$  で表せて  $A = TDT^{-1}$  なので,  $A^k = TD^kT^{-1}$  である. ゆえに

$$\exp(At) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} T^{-1}, \quad (\text{B.199})$$

となる. ここで  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は  $A$  の固有値である. さらに,  $A$  が対称行列なら  $T$  の列ベクトルは固有ベクトルに対応し,  $T$  は直交行列 ( $T^{-1} = T^T$ ) になる.

なお, 解核行列に関しては笠原 (1982) を参照のこと.

## B.7.2 ブシネスク方程式への応用

式 (B.125)-(B.127) の常微分方程式に対して, 先ほどの陰的公式を用いる. ただし, ここでは硬さの原因となるのは水平拡散項のみであると考え, 鉛直拡散項は非線形項と一緒に扱う. すると非線形項を除いた線形の微分方程式は各変数 ( $\psi, \chi, \Theta$ ), 各層 ( $k = \frac{1}{2}, \dots, K - \frac{1}{2}, 1, \dots, K - 1$ ), 各波数成分に対して, 1 変数の微分方程式として取り扱える. すなわち, 係数行列は対角行列となり, 各層で拡散係数の値は変化しないので係数行列  $A$  は  $I$  を単位行列とすれば

$$A = -\nu_H \frac{n(n+1)}{a^2} I, \quad (\text{B.200})$$

で表される (右辺分母の  $a$  は惑星半径). 今

$$a_n \equiv -\nu_H \frac{n(n+1)}{a^2}, \quad (\text{B.201})$$

と置けば, 解核行列は前節の内容をふまえて

$$R_n(t, s) = e^{a_n(t-s)} I, \quad (\text{B.202})$$

となる. 非斉次項も今は考えておらず, 非線形項は時間に陽的に依存しないので, 前述のルンゲ・クッタ公式は次のように簡単になる.

$$k_1 = hg(x(t)), \quad (\text{B.203})$$

$$k_2 = hg\left(e^{a_n \frac{h}{2}} \left(x(t) + \frac{1}{2}k_1(n)\right)\right), \quad (\text{B.204})$$

$$k_3 = hg\left(e^{a_n \frac{h}{2}} x(t) + \frac{1}{2}k_2(n)\right), \quad (\text{B.205})$$

$$k_4 = hg\left(e^{a_n \frac{h}{2}} \left(e^{a_n \frac{h}{2}} x(t) + k_3(n)\right)\right), \quad (\text{B.206})$$

$$x(t+h) = e^{a_n \frac{h}{2}} \left[ e^{a_n \frac{h}{2}} \left(x(t) + \frac{1}{6}k_1\right) + \frac{1}{3}(k_2 + k_3) \right] + \frac{1}{6}k_4. \quad (\text{B.207})$$

ここで,  $g(x)$  は非線形項を表す関数である. また温位の式では  $\nu_H$  は  $\kappa_H$  に変わることに注意したい.

### B.7.3 実際に計算する上での注意

本節で扱ってきた硬い方程式の解法は, 数値計算の安定性は向上するが, 安定に走ったからといって, その結果の信頼性を保証するものではない. 実際上は方程式の“硬さ”が大きくなると, 時間刻み幅が大きいときはその刻み幅に結果が依存するようになってしまう. 刻み幅を徐々に細かくしていき, 結果が変わらないようになれば, その結果は信頼できる.

## 付録 C

# 変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックスに関する補足

付録 C では東西平均場における波と平均流の相互作用解析に欠かせない、変形オイラー平均 (Transformed Eulerian Mean, TEM) 方程式系とエリアッセン・パーム (Eliassen-Palm, EP) フラックスに関する補足を行う。はじめに伝統的な TEM 方程式系を示し、次にブシネスク系で伝統的な TEM 方程式系を Vallis (2006) を参考に導出する。そして、Ferrari and Plumb (2003) で提案された、一般化した TEM 方程式系を導出する。

### C.1 伝統的な変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックス

Eliassen and Palm (1961) は任意の水平・鉛直シアを伴う東西平均流と波擾乱との相互作用に関する基本的な定理を初めて提出した。伝統的な TEM 方程式系は Andrews and McIntyre (1976) によって定式化され、Edmon et al., (1980) が EP フラックスとその収束発散を矢印と等値線でそれぞれ表した子午面断面図を描き、波と平均流の相互作用の診断方法を提案した。この診断方法は現在では非常に広く活用されている。

対数圧力座標  $Z = -H \ln(p/p_R)$  (ここで  $p_R$  は基準圧力,  $H$  はスケールハイト) で記述された、伝統的な TEM 方程式系は以下の通りである (Vallis, 2006)。ただし、以下では上線 ( $\bar{\cdot}$ ) は東西平均を、下付き文字は偏微分を表し、 $\rho_R = \rho_0 \exp(-Z/H)$  で  $\rho_0$  は定数とす

る.

東西運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w}^*)}{\partial Z} - \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) \bar{v}^* - \bar{X} = \frac{1}{a \rho_R \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{C.1})$$

ただし

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \rho_R \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} \cos \phi \right), \quad (\text{C.3})$$

$$F^\phi = a \rho_R \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} - \overline{u' v'} \right), \quad (\text{C.4})$$

$$F^Z = a \rho_R \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right] \frac{\overline{v' \Theta'}}{\Theta_Z} - \overline{u' w'} \right), \quad (\text{C.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F^Z}{\partial Z}. \quad (\text{C.6})$$

南北運動方程式

$$\bar{u} \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \phi} = \hat{S}. \quad (\text{C.7})$$

ここで  $G$  は傾度風平衡からずれようとする項だが, 多くの場合  $\hat{S}$  は非常に小さく, 力学的な寄与は無視できる (Andrews et al., 1987).

静力学平衡の式

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Z} = \frac{R}{H} \bar{\Theta} e^{-\kappa Z/H}. \quad (\text{C.8})$$

連続の式

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* \cos \phi) + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial (\rho_R \bar{w}^*)}{\partial Z} = 0. \quad (\text{C.9})$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{v}^* \cdot \nabla \bar{\Theta} = S - \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \rho_R \frac{\overline{v' \Theta'} a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}{\Theta_Z} + \rho_R \overline{w' \Theta'} \right). \quad (\text{C.10})$$

TEM 方程式系の導出過程の詳細は塚原 (2005) に示されている.

この TEM 方程式系にブシネスク近似を行い、 $z$  座標系で書くと以下の通りになる。

東西運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w}^*)}{\partial z} - \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) \bar{v}^* - \bar{X} = \frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{C.11})$$

ただし

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \right), \quad (\text{C.12})$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \cos \phi \right), \quad (\text{C.13})$$

$$F^\phi = a \cos \phi \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} - \overline{u' v'} \right), \quad (\text{C.14})$$

$$F^z = a \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right] \frac{\overline{v' \Theta'}}{\bar{\Theta}_z} - \overline{u' w'} \right), \quad (\text{C.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F^z}{\partial z}. \quad (\text{C.16})$$

南北運動方程式

$$\bar{u} \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \phi} = \hat{S}. \quad (\text{C.17})$$

静力学平衡の式

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = g \frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0}. \quad (\text{C.18})$$

連続の式

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0. \quad (\text{C.19})$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{v}^* \cdot \nabla \bar{\Theta} = S - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v' \Theta' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}}{\bar{\Theta}_z} + \overline{w' \Theta'} \right). \quad (\text{C.20})$$

ここで注意したいのは EP フラックス  $\mathbf{F}$  は分母に  $\bar{\Theta}_z$  を持っているということである。すなわち、本研究で用いたような熱フラックスなしの境界条件だと  $\bar{\Theta}_z = 0$  となり、EP フラックスは境界に近づくにつれ、無限大に発散してしまう。それは残差子午面循環が閉じないということでもある。このような問題は主にブシネスク流体として扱われる海洋を対象としたときにも現れる。これを解決するために TEM 方程式系を拡張する必要があるが、その準備として次節で Vallis (2006) による TEM 方程式系の導出方法を紹介する。

## C.2 Vallis (2006) による導出

本節で紹介する TEM 方程式系の導出方法は Vallis (2006) を参考にしたものだが、彼は Held and Schneider (1999), Ferrari and Plumb (2003), Plumb and Ferrari (2005) を参考にしている。

### C.2.1 渦誘導速度 (eddy induced velocity) の導入

オイラー平均方程式から TEM 方程式に変換するために次の形で表される  $\bar{\mathbf{v}}^*$  を定義する必要がある。

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + \nabla \times \psi. \quad (\text{C.21})$$

つまり渦誘導速度 (eddy induced velocity)  $\tilde{\mathbf{v}}$  を決める必要がある。

まず、運動量と熱力学のオイラー平均方程式をベクトルで書けば以下のようなになる。なお、本節の上線は任意の平均を表すもので、東西平均でなくてもよい。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \times \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{\Phi} + \mathbf{R}, \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\Theta} = S[\Theta] - \nabla \cdot \mathbf{F}[\Theta]. \quad (\text{C.23})$$

また、任意のトレーサー (追跡子; ラグランジュ保存量)  $\Xi$  に対して

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\Xi} = S[\Xi] - \nabla \cdot \mathbf{F}[\Xi], \quad (\text{C.24})$$

である。ここで、 $\mathbf{R}$  はレイノルズ応力を表す項、 $S$  は生成消滅項、 $\mathbf{F}$  は渦フラックスを表す項である。すなわち、(中辺はデカルト座標の場合)

$$\nabla \cdot \mathbf{F}[\Theta] = \frac{\partial \overline{u'\Theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\Theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\Theta'}}{\partial z} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'\Theta'}, \quad (\text{C.25})$$

である。

ここで、渦フラックス  $\mathbf{F}$  を、そのトレーサー (以下では温位  $\Theta$  の例として進める) の等値線に直交する成分  $\mathbf{F}_\perp$  と平行な成分  $\mathbf{F}_\parallel$  に分ける。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}. \quad (\text{C.26})$$

ここで  $\mathbf{n} = \nabla\bar{\Theta}/|\nabla\bar{\Theta}|$  であり, すなわち

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{\mathbf{F} \cdot \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{F}_{\parallel} = \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \times \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.28})$$

である.  $\mathbf{F}_{\parallel}$  はスキューフラックス (skew flux) と呼ばれている. ベクトル恒等式  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla\phi) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \nabla\phi$  を用いることで,  $\mathbf{F}_{\parallel}$  の発散は,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{\parallel} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \times \nabla\bar{\Theta} \right) = \left( \nabla \times \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \right) \cdot \nabla\bar{\Theta} \equiv \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.29})$$

と書ける. さらに  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$  より  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla\bar{\Theta} = \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\bar{\Theta})$  であり, つまり, スキューフラックスは  $\bar{\Theta}$  を再分配するだけで, これは  $\bar{\Theta}$  の移流のように扱える.

(C.23) に (C.21) を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla\bar{\Theta} &= S - \nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla \times \psi) \cdot \nabla\bar{\Theta}, \\ &= S - \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot (\bar{\Theta} \nabla \times \psi), \\ &= S - \nabla \cdot [\mathbf{F} - \bar{\Theta}(\nabla \times \psi)], \\ &= S - \nabla \cdot (\mathbf{F} + \nabla\bar{\Theta} \times \psi), \\ &\equiv S - \nabla \cdot \mathbf{F}^*. \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{F}^*$  は残差フラックスである.

$$\mathbf{F}^* \equiv \mathbf{F} + \nabla\bar{\Theta} \times \psi. \quad (\text{C.30})$$

上式から,  $\mathbf{F}^*$  と  $\mathbf{F}$  とは, トレーサーの等値線に直交する成分は同じであることが分かる.

$$\mathbf{F}^* \cdot \frac{\nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|} = \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|}. \quad (\text{C.31})$$

しかし, 等値線に平行な成分は異なる. そこで

$$\mathbf{F}_{\parallel}^* = 0, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{\perp}, \quad (\text{C.32})$$

となるように,  $\psi$  を定める. すなわち

$$\psi = \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2}, \quad (\text{C.33})$$



とする. このとき

$$\nabla\bar{\Theta} \times \boldsymbol{\psi} = \nabla\bar{\Theta} \times \frac{\nabla\bar{\Theta} \times \mathbf{F}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} = -\mathbf{F}_{\parallel}, \quad (\text{C.34})$$

である. 以上のとき, まとめると

$$\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla\bar{\Theta} = S - \nabla \cdot \mathbf{F}^*, \quad (\text{C.35})$$

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} - \nabla \times \frac{\mathbf{F} \times \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2}, \quad (\text{C.36})$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{F} \cdot \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} \nabla\bar{\Theta}, \quad (\text{C.37})$$

である. ただし, この方程式内で  $\Theta$  は他のトレーサーでも構わないことに注意したい.

## C.2.2 変形オイラー平均方程式系の導出

前節は任意の平均に対する議論であったが, ここでは, トレーサーを  $\Theta$ , 平均を東西平にして, TEM 方程式系を求めることにする.

平均は東西平均だから

$$\mathbf{F}[\Theta] = \overline{\mathbf{v}'\Theta} = \overline{v'\Theta'}\mathbf{j} + \overline{w'\Theta'}\mathbf{k}, \quad (\text{C.38})$$

なので, ( $\phi, z$  の下付き文字は微分を表す)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F} \times \nabla\bar{\Theta}}{|\nabla\bar{\Theta}|^2} &= \frac{\overline{v'\Theta'}\bar{\Theta}_z - \overline{w'\Theta'}a^{-1}\bar{\Theta}_\phi}{a^{-2}\bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \mathbf{i}, \\ &\approx \frac{\overline{v'\Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

2行目への近似は  $a^{-2}\bar{\Theta}_\phi^2 \ll \bar{\Theta}_z^2$ , および鉛直渦  $\Theta$  フラックスの無視によるものである.

(C.36), (C.39) より

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \right), \quad (\text{C.40})$$

$$\bar{\mathbf{w}}^* = \bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}}{\bar{\Theta}_z} \cos \phi \right). \quad (\text{C.41})$$

また,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^*[\Theta] &= \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi + \overline{w'\Theta'}\overline{\Theta}_z}{a^{-2}\overline{\Theta}_\phi^2 + \overline{\Theta}_z^2} (a^{-1}\overline{\Theta}_\phi\mathbf{j} + \overline{\Theta}_z\mathbf{k}), \\ &\approx \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z^2} + \frac{\overline{w'\Theta'}}{\overline{\Theta}_z} \right) (a^{-1}\overline{\Theta}_\phi\mathbf{j} + \overline{\Theta}_z\mathbf{k}),\end{aligned}\quad (\text{C.42})$$

なので,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F}^* &\approx \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z^2} + \frac{\overline{w'\Theta'}}{\overline{\Theta}_z} \right) a^{-1}\overline{\Theta}_\phi \cos \phi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z^2} + \frac{\overline{w'\Theta'}}{\overline{\Theta}_z} \right) \overline{\Theta}_z \right], \\ &\approx \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z} + \overline{w'\Theta'} \right),\end{aligned}\quad (\text{C.43})$$

となる. 2行目への近似は  $a^{-2} \ll H^{-2}$  によるものである.

(C.35), (C.43) から

$$\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}^*} \cdot \nabla \overline{\Theta} = S - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{v'\Theta'}a^{-1}\overline{\Theta}_\phi}{\overline{\Theta}_z} + \overline{w'\Theta'} \right) \quad (\text{C.44})$$

となり, TEM 方程式系の熱力学方程式が導けたことになる ((C.20) と同じ). 後は (C.40), (C.41) を用いて, オイラー平均方程式系を変形すれば, TEM 方程式系 (C.11)-(C.20) が得られる.

### C.3 一般化した変形オイラー平均方程式系とエリアッセン・パームフラックス

前節で TEM 方程式系を導くにあたって, 以下の3つの仮定に基づく近似が行われている.

- (1) 等温位面線は水平に近い:  $a^{-1}\overline{\Theta}_\phi \ll \overline{\Theta}_z$ ,
- (2) 鉛直渦  $\Theta$  フラックスは無視できる:  $\overline{w'\Theta'} \ll \overline{v'\Theta'}$ ,
- (3) 大気のアスペクト比 (縦横比) は小さい:  $a^{-1} \ll H^{-1}$ .

すなわち, 従来の TEM 方程式系および EP フラックスは上記の仮定が破れるときには不適切だということである (本研究の熱的境界条件が仮定 (1) を破る顕著な例).

そこで, 上の仮定による近似をせずに, 一般化した TEM 方程式系および EP フラックスを導出すると以下の通りになる.

まず,

$$\frac{\mathbf{F} \times \nabla \bar{\Theta}}{|\nabla \bar{\Theta}|^2} = \frac{v' \bar{\Theta}' \bar{\Theta}_z - w' \bar{\Theta}' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \mathbf{i} \equiv \psi \mathbf{i}, \quad (\text{C.45})$$

とおく. (符号に注意  $\psi = -\psi \mathbf{i}$ )

ゆえに

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{C.46})$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\psi \cos \phi), \quad (\text{C.47})$$

であり,

東西運動方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w}^*)}{\partial z} - \left( f + \frac{\bar{u} \tan \phi}{a} \right) \bar{v}^* - \bar{X} = \frac{1}{a \cos \phi} \nabla \cdot \mathbf{F}_u, \quad (\text{C.48})$$

ただし

$$F_u^\phi = a \cos \phi \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \psi - \bar{u}' v' \right), \quad (\text{C.49})$$

$$F_u^z = a \cos \phi \left( \left[ f - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right] \psi - \overline{u' w'} \right), \quad (\text{C.50})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_u = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_u^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F_u^z}{\partial z}. \quad (\text{C.51})$$

熱力学方程式は

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{v}^* \cdot \nabla \bar{\Theta} = S - \nabla \cdot \mathbf{F}_\Theta, \quad (\text{C.52})$$

ただし

$$F_\Theta^\phi = \left( \frac{v' \bar{\Theta}' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi + w' \bar{\Theta}' \bar{\Theta}_z}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \right) a^{-1} \bar{\Theta}_\phi, \quad (\text{C.53})$$

$$F_\Theta^z = \left( \frac{v' \bar{\Theta}' a^{-1} \bar{\Theta}_\phi + w' \bar{\Theta}' \bar{\Theta}_z}{a^{-2} \bar{\Theta}_\phi^2 + \bar{\Theta}_z^2} \right) \bar{\Theta}_z, \quad (\text{C.54})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\Theta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\Theta^\phi \cos \phi) + \frac{\partial F_\Theta^z}{\partial z}. \quad (\text{C.55})$$

その他の方程式は通常の TEM 方程式系と同様である.

本研究では3次元解の EP フラックス解析には上記の一般化された EP フラックスを用いている.

## 参考文献

- Anderson E, Bai Z, Bischof C, Blackford S, Demmel J, Dongarra J, Du Croz J, Greenbaum A, Hammarling S, McKenney A, Sorensen D. 1999. *LAPACK Users' Guide Third Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Andrews DG, Holton JM, Leovy CB. 1987. *Middle Atmosphere Dynamics*. Academic Press.
- Andrews DG, McIntyre ME. 1976. Planetary Waves in Horizontal and Vertical Shear: The Generalized Eliassen-Palm Relation and the Mean Zonal Acceleration. *J. Atmos. Sci.* **33**: 2031-2048.
- Bird MK, Allison M, Asmar SW, Atkinson DH, Avruch IM, Dutta-Roy R, Dzierma Y, Edenhofer P, Folkner WM, Gurvits LI, Johnston DV, Plettemeier D, Pogrebenko SV, Preston RA, Tyler GL. 2005. The vertical profile of winds on Titan. *Nature*. **438**: 800-802.
- Boyer C, Gurein P. 1969. Etude de la rotation rétrograde, en 4 jours, de la couche extérieure nuageuse de Vénus. *Icarus*. **11**: 338-355.
- Caballero R, Pierrehumbert RT, Mitchell JL. 2008. Axisymmetric, nearly inviscid circulations in non-condensing radiative-convective atmospheres. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **134**: 1269-1285.
- Chandrasekhar S. 1981. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover edition). Oxford University Press.
- Charney JG. 1973. Planetary fluid dynamics in *Dynamical Meteorology*. Edited by Morel P, Reidel, Dordrecht, Holland.
- Charney JG, Phillips NA. 1953. Numerical integration of the quasigeostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. *J. Meteor.* **10**: 71-99.
- Del Genio AD, Zhou W. 1996. Simulation of superrotation on slowly rotating planets: Sensitivity to rotation and initial conditions. *Icarus*. **120**: 332-343.
- Edmon Jr HJ, Hoskins BJ, McIntyre ME. 1980. Eliassen-Palm Cross Sections for the Troposphere. *J. Atmos. Sci.* **37**: 2600-2616.
- Eliassen A, Palm E. 1961. On the transfer of the energy stationary mountain waves. *Geophys. Publ.* **22**: 1-23.
- Fels SB, Lindzen RS. 1974. The interaction of thermally excited gravity waves with mean flows. *Geophys. Fluid Dyn.* **6**: 149-191.

- Ferrari R, Plumb RA. 2003. Residual circulation in the ocean. *Near-Boundary Processes and Their Parameterization: Proc. 'Aha Huliko'a Hawaiian Winter Workshop*: 219-228.
- Flasar FM, Allison M, Lunine JJ. 1997. Titan zonal wind model in *Huygens: Science, Payload and Mission, Proceedings of an ESA conference*. Edited by Wilson A. ESA Publications
- Gierasch PJ. 1975. Meridional circulation and the maintenance of the Venus atmospheric rotation. *J. Atmos. Sci.* **32**: 1038-1044.
- Hadley G. 1735. Concerning the cause of the general trade winds. *Philosophical Transactions of Royal Society of London.* **39**: 58-62.
- Halley E. 1686. An historical account of the trade winds, and monsoons, observable in the seas between and near the tropicks, with an attempt to assign the physical cause of the said winds. *Transactions of Royal Society of London.* **16**: 153-168.
- Held IM, Hou AY. 1980. Non-linear axially-symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **37**: 515-533.
- Held IM, Schneider T. 1999. The surface branch of the zonally averaged mass transport circulation in the troposphere. *J. Atmos. Sci.* **56**: 1688-1697.
- Held IM, Suarez MJ. 1994. A Proposal for the Intercomparison of the Dynamical Cores of Atmospheric General Circulation Models. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* **75**: 1825-1830.
- Hide R. 1969. Dynamics of the atmospheres of the major planets with an appendix on the viscous boundary layer at the rigid bounding surface of an electrically-conducting rotating fluid in the presence of a magnetic field. *J. Atmos. Sci.* **26**: 841-853.
- Hou AY. 1984. Axisymmetric circulations forced by heat and momentum sources: A simple model applicable to the Venus atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **41**: 3437-3455.
- Hou AY and Lindzen RS. 1992. The influence of concentrated heating on the Hadley circulation. *J. Atmos. Sci.* **49**: 1233-1241.
- ホートン JT. 1979. 大気物理学. みすず書房 (廣田勇, 会田勝 訳)
- Iga S, Matsuda Y. 1999. A mechanism of super-rotation in the Venus atmosphere: Meridional circulation and barotropic instability. *Theoretical and applied mechanics.* **48**: 379-383.
- 石岡圭一. 2004. スペクトル法による数値計算入門. 東京大学出版会.
- 石岡圭一. 2005. ispack-0.71. <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>. 地球流体 電脳倶楽部.
- James IN. 2002. Hadley circulation in *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Edited by Holton JR, Curry JA, Pyle JA. Academic Press.
- Kalnay E et al. 1996. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* **77**: 437-431.

- 笠原皓司. 1982. 微分方程式の基礎. 朝倉書店.
- Lindzen RS and Hou AY. 1988. Hadley circulations for zonally averaged heating centered off the equator. *J. Atmos. Sci.* **45**: 2416-2427.
- Lindzen RS. 1990. *Dynamics in Atmospheric Physics*. Cambridge University Press.
- Lebonnois S, Cressin A, Hourdin F, Eymet V, Fournier R, Dufresne JL. 2006. Super-rotation simulated with the new LMD Venus General Circulation Model. *European Planetary Science Congress 2006*.
- Lee C, Lewis SR, Read PL. 2005. A numerical model of the atmosphere of Venus. *Advances in Space Research*. **36**: 2142-2145.
- Lorenz EN. 1960. Energy and numerical weather prediction. *Tellus*. **12**: 364-373.
- Lorenz EN. 1967. *The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere*. World Meteorological Organization Monograph No. 218. TP 115.
- Matsuda Y. 1980. Dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*. **58**: 443-470.
- Matsuda Y. 1982. A further study of dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*. **60**: 245-254.
- 松田佳久. 1987. 金星大気の力学. 気象研究ノート. **155**: 61-80.
- 松田佳久. 2000. 惑星気象学. 東京大学出版会.
- 松田佳久, 高木征弘. 2005. 金星大気のスーパ・ローテーション. 天文月報. **98**: 14-21.
- 松田佳久, 余田成男. 1985. 気象とカタストロフィー 気象学における解の多重性. 気象研究ノート. **151**: 1-145.
- 小国力. 1997. Fortran 95, C & Java による新数値計算方法—数値計算とデータ解析—. サイエンス社.
- 小倉義光. 1997. メソ気象の基礎理論. 東京大学出版会.
- Persson A. 2006. Hadley's principle: Understanding and misunderstanding the trade winds. *History of Meteorology*. **3**: 17-42.
- Plumb RA, Ferrari R. 2005. Transformed Eulerian-mean theory. Part I: Nonquasi-geostrophic theory for eddies on a zonal-mean flow. *J. Phys. Oceanogr.* **35**: 165-174.
- Rew R, Davis G, Emmerson S, Davies H. 1997. NetCDF User's Guide for FORTRAN. <http://www.unidata.ucar.edu/software/netcdf/guide/>. Unidata Program Center.
- Rossow WB. 1983. A general circulation model of a Venus-like atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **40**: 273-302.
- 佐藤正樹. 1992. 軸対称モデルによる放射対流平衡: ハドレー循環の力学 (学位論文)
- Satoh M. 1994. Hadley circulations in radiative-convective equilibrium in an axially symmetric atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **51**: 1947-1968.
- Satoh M. 2004. *Atmospheric Circulation Dynamics and General Circulation Mod-*

- els. Springer.
- Satoh M, Shiobara M, Takahashi M. 1995. Hadley circulations and their rôles in the global angular momentum budget in two- and three-dimensional models. *Tellus*. **47A**: 548-560.
- Schneider EK. 1977. Axially-symmetric steady-state models of basic state for instability and climate studies. II. Nonlinear calculations. *J. Atmos. Sci.* **34**: 280-296.
- Schneider EK. 1983. Martin great dust storms: Interpretive axially symmetric models. *Icarus*. **55**: 302-331.
- Schubert G, Whitehead JA. 1969. Moving flame experiment with liquid mercury: Possible implications for Venus atmosphere. *Science*. **163**: 71-72.
- Schubert G. 1983. General Circulation and the dynamical state of the Venus atmosphere *in Venus*. University of Arizona Press.
- Thompson R. 1970. Venus general circulation is a merry-go-round. *J. Atmos. Sci.* **27**: 1107-1116.
- 豊田英司, 石渡正樹, 森川靖大, 堀之内武, 小高正嗣, 竹広真一, 林祥介, 地球流体電脳倶楽部 Davis プロジェクト. 2006. gtool4 netCDF 規約. <http://www.gfd-dennou.org/library/gtool4/>. 地球流体電脳倶楽部.
- 塚原大輔, 堀之内武. 2005. NumRu:: GPhys:: EP Flux 数理ドキュメント. [http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/products/gphys/tutorial/ep\\_flux/math-doc/document.pdf](http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/products/gphys/tutorial/ep_flux/math-doc/document.pdf). 地球流体電脳倶楽部.
- Vallis GK. 2006. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Williams GP. 2003. Jet sets. *J. Meteor. Soc. Japan*. **81**: 439-476.
- Wirth V. 2006. A unified perspective on the dynamics of axisymmetric hurricanes and monsoons. *J. Atmos. Sci.* **63**: 2529-2547.
- 山本博基. 2007. 軸対称モデルにおけるハドレー循環に関する研究、および温暖化研究からみたモデルの階層性に関するレビュー (卒業論文)
- Yamamoto M, Takahashi M. 2003. The fully developed superrotation simulated by a general circulation model of a Venus-like atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **60**: 561-574.
- Young RE, Pollack JB. 1977. A three-dimensional model of dynamical processes in the Venus atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **34**: 1315-1351.