9 流れの力学的性質の特徴づけ

この節では流れの力学的性質を特徴づける方法について述べる.

Okubo-Weiss criterion と Hua-Klein criterion について順に述べる. [6]

9.1 系の設定

密度一様の 2 次元流体を考える:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{S}, \tag{178}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \tag{179}$$

ここで, ここで, $\vec{u} = (u, v)$ は速度ベクトルで u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分である. $\vec{S} = (S^x, S^y)$ は粘性項や外力項をまとめて表したものである. また,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} := \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \tag{180}$$

はラグランジュ微分である. 回転系の場合は, 運動量方程式の左辺に $-f\vec{e}_z \times \vec{u} = (-fv, fu)$ が入るが, これとバランスする p_c を考えて, 右辺の圧力勾配項を p の p_c からのズレと置き換えると, 同じ形に帰着する.

(鉛直) 渦度は

$$\zeta = \nabla \times \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{181}$$

で, その時間発展方程式は速度勾配テンソル A を用いて,

$$\frac{\mathrm{D}\nabla\zeta}{\mathrm{D}t} + \mathsf{A} \cdot \nabla\zeta = 0, \tag{182}$$

$$\mathsf{A} := \nabla\vec{u} = [\partial_i u_j] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_\mathrm{n} & \sigma_\mathrm{s} + \zeta \\ \sigma_\mathrm{s} - \zeta & -\sigma_\mathrm{n} \end{pmatrix} \tag{183}$$

とかける. $\nabla\vec{u}$ は ∇ と $\vec{u}$ のダイアドである. ここで, σ_n, σ_s は

$$\sigma_\mathrm{n} := \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{184}$$

$$\sigma_\mathrm{s} := \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{185}$$

である. つまり, 渦度勾配のラグランジュ的時間変化は, 等渦度線に対して垂直な方向 (すなわち渦度勾配ベクトルの向き) の速度勾配に比例する. これは等渦度線に対して垂直な方向の速度勾配があるぶんだけ, 等渦度線は近付いてくることを意味している.

[6] 参考文献: Okubo(1970), Weiss(1991), Basdevant and Philipovitch(1994), Hua and Klein(1998).

9.2 Okubo-Weiss criterion の導出

Okubo-Weiss criterion は, 2 次元非発散流体の流れの力学的性質を調べるのに使われる判定基準である. 判定基準量 Q を定義し, Q の正負によって流れ場の力学的性質が楕円型か双曲型かを判別する.

流れ場の時間変化は渦度場の時間変化に比べてゆっくりとしていると仮定する. つまり, 速度勾配テンソルを一定とみなす. そうすると, A の固有値を求めると, 等渦度線 (渦度勾配) のラグランジュ的時間変化の特徴が分かる.

A の固有値を λ と表すと, 固有方程式から,

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}(\sigma^2 - \zeta^2) \tag{186}$$

となる. あるいは,

$$\begin{aligned} \lambda^2 =& \frac{1}{4}W, & (187) \\ W :=& \sigma^2 - \zeta^2 & (188) \\ =& \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} & (189) \\ =& \det \mathsf{A} & (190) \end{aligned}$$

と表す. ここで, ストレイン σ は速度歪みテンソルの大きさで, その二乗は次のように表せることを用いた:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_{\mathrm{n}}^2 + \sigma_{\mathrm{s}}^2 & (191) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 & (192) \\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & (193) \\ &= -4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. & (194) \end{aligned}$$

固有値の二乗の符号は W の符号そのものである. 従って, $W > 0$ のときに固有値は二つの実数になる. このとき, 二つの実固有値は片方が正で片方が負となる. これは, 流れ場の非圧縮性から, ある方向に流れがあれば, それを補うように流れができるためである. このとき, 渦度場の運動は双曲型の特徴を持つ. 一方, $W < 0$ のときは固有値は二つの純虚数になり, 渦度場の運動は楕円型の特徴を持つ. つまり, 渦度場は局所的に回転する.

9.3 Validity

Okubo-Weiss のクライテリオンは, 流れ場の時間変化は渦度場の時間変化に比べてゆっくりとしていると仮定している. Basdevant and Philipovitch(1994) はこの仮定が正しい条件を調べた.

まず, 渦度勾配の 2 階のラグランジュ微分を考える.

$$\frac{\mathrm{D}^2\nabla\zeta}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}\mathsf{A}}{\mathrm{D}t}\cdot\nabla\zeta + \mathsf{A}\cdot\frac{\mathrm{D}\nabla\zeta}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{195}$$

速度勾配のタイムスケールが渦度勾配のタイムスケールより大きいことは,

$$\left|\frac{\mathrm{D}\mathsf{A}}{\mathrm{D}t}\cdot\nabla\zeta\right| \ll \left|\mathsf{A}\cdot\frac{\mathrm{D}\nabla\zeta}{\mathrm{D}t}\right| \tag{196}$$

と表せる．これを書き直すと，

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right| \ll \frac{1}{4}|W| \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \end{matrix} \right|. \tag{197}$$

ここで, A の大きさは二つの固有ベクトルの張る面積の拡大率であるから, 二つの固有ベクトルに対応した固有値の積, すなわち λ^2 となることを用いた.

ユークリッドノルムを用いると,

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{n}}}{\mathrm{D}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{s}}}{\mathrm{D}t}\right)^2\right]|\nabla\zeta|^2 \ll \frac{1}{16}W^2\,|\nabla\zeta|^2 \tag{198}$$

となる．左辺の σ_{n}, σ_{s} のラグランジュ微分は, x, y 成分で書いた運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{199}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{200}$$

を x, y で偏微分した式

$$\frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t}-u_xv_y+v_xu_y=-p_{xx}, \tag{201}$$

$$\frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t}=-p_{xy}, \tag{202}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}=-p_{xy}, \tag{203}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}-u_xv_y+v_xu_y=-p_{yy} \tag{204}$$

を差し引きすることで得られる:

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{n}}}{\mathrm{D}t}=-\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right), \tag{205}$$

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{s}}}{\mathrm{D}t}=-2\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}. \tag{206}$$

従って, 左辺を書き換えて, ついでに $\frac{1}{4}|\nabla\zeta|^2$ を落すと,

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}\right)^2 \ll \frac{1}{4}|W|^2 \tag{207}$$

となる．次に右辺の W を圧力を使って書き直す．まず,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=-\nabla^2 p \tag{208}$$

なので,

$$W=-2\nabla^2 p \tag{209}$$

となる．また, 圧力のヘッセ行列 (ヘシアン) p''

$$p'':=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{pmatrix} \tag{210}$$

を用いると, $\nabla^2 p = \mathrm{trace}(p'')$ なので, $W = -2\mathrm{trace}(p'')$ とも書ける. まとめると,

$$W = -4\det \mathsf{A} = -2\nabla^2 p = -2\mathrm{trace}(p'') \tag{211}$$

となる. これを用いると, 条件は

$$\frac{\mathrm{trace}(p'')^2 - 4\det(p'')}{\mathrm{trace}(p'')^2} \ll 1 \tag{212}$$

となる.

ヘシアンの固有値 λ_{p} を求めると,

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left[\nabla^2 p \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 4\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\right)^2}\right] \tag{213}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\nabla^2 p \pm \left(\mathrm{trace}(p'')^2 - 4\det(p'')\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{214}$$

従って, λ_{p} の取りうる固有値 $\lambda_{\mathrm{p}+}, \lambda_{\mathrm{p}-}$ の和と差は,

$$\lambda_{\mathrm{p}+} + \lambda_{\mathrm{p}-} = \nabla^2 p, \tag{215}$$

$$|\lambda_{\mathrm{p}+} - \lambda_{\mathrm{p}-}| = \left(\mathrm{trace}(p'')^2 - 4\det(p'')\right)^{\frac{1}{2}} \tag{216}$$

となるので, 条件はこの固有値の比 R

$$R := \frac{(\lambda_{\mathrm{p}+} - \lambda_{\mathrm{p}-})^2}{(\lambda_{\mathrm{p}+} + \lambda_{\mathrm{p}-})^2} \tag{217}$$

を用いて,

$$R \ll 1 \tag{218}$$

とも書ける.

まず, 条件式を書き直せば, $-4\det(p'') \ll 1$ となる. もし $\det(p'') > 0$ であれば, 常に条件を満たす.

また, 次の式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{219}$$

から,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \qquad \text{if} \qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \tag{220}$$

であることが分かる.

メモ: $z = f(x,y)$ のガウス曲率は $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)/(1 + f_x^2 + f_y^2)^2$. (小林昭七 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版) 裳華房)

9.4 Hua-Klein criterion

Hua-Klein criterion についてまとめる.

基礎方程式は

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \ddot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p \tag{221}$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{222}$$

$$\tag{223}$$

である．ここで $\vec{u} = (u, v)$ で, 流れ関数 ψ を用いて

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{224}$$

$$v = \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{225}$$

とかける．

流れ関数を位置 $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ における関数値を用いて, Taylor 展開すると,

$$\psi_{\vec{x}} = \psi_{\vec{x}_0} + \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{\vec{x}_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{\vec{x}_0}(y - y_0) \tag{226}$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}_0}(x - x_0)^2 + \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{x}_0}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{\vec{x}_0}(y - y_0)^2 + \cdots \tag{227}$$

$$= \psi_{\vec{x}_0} + V(x - x_0) - U(y - y_0) + a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 + \cdots \tag{228}$$

となる．ここで, $\psi_{\vec{x}} = \psi(x, y, t)$, $\psi_{\vec{x}_0} = \psi(x_0, y_0, t)$ と表記した．

速度の一階微分から, 次のような量を計算できる．

$$\zeta := v_x - u_y = \psi_{xx} + \psi_{yy} =: 2(a + c) \tag{229}$$

$$\sigma_{\mathrm{n}} := u_x - v_y = -2\psi_{xy} =: -2b \tag{230}$$

$$\sigma_{\mathrm{s}} := v_x + u_y = \psi_{xx} - \psi_{yy} =: 2(a - c) \tag{231}$$

これは ζ は渦度, σ_{n} は速度勾配テンソルの非対称成分, σ_{s} は速度勾配テンソルの対称成分である．

運動方程式を x, y で偏微分することで,

$$\frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t} - u_x v_y + v_x u_y = -p_{xx} \tag{232}$$

$$\frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t} = -p_{xy} \tag{233}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = -p_{xy} \tag{234}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} + v_x u_y - u_x v_y = -p_{yy} \tag{235}$$

となる．これらの和と差から,

$$-u_x v_y + v_x u_y = -\frac{1}{2}\nabla^2 p \qquad \text{((232) 式 + (232) 式)} \tag{236}$$

$$\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}t} = 0 \qquad \text{((234) 式 - (233) 式)} \tag{237}$$

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{n}}}{\mathrm{D}t} = -p_{xx} + p_{yy} \qquad \text{((232) 式 - (235) 式)} \tag{238}$$

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{s}}}{\mathrm{D}t} = -2p_{xy} \qquad \text{((234) 式 + (233) 式)} \tag{239}$$

となる．

また, a,b,c のラグランジュ微分は

$$\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} = -2p_{xy} \qquad (234)\text{式}\times\tfrac{1}{2} \tag{240}$$
$$\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{2}(p_{xx}-p_{yy}) \qquad ((235)\text{式-}(232)\text{式})\times\tfrac{1}{2} \tag{241}$$
$$\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}t} = 2p_{xy} \qquad (233)\text{式}\times(-\tfrac{1}{2}) \tag{242}$$

となる.

$\psi(x,y,t)$ を $\vec{x}_0$ における関数値で表現したが, $\vec{x}_0$ を流体粒子の位置にとると, $\vec{x}_0$ もラグランジュ的に変化することに注意する. これを念頭に置いて, U,V,a,b,c を用いて $\dot{x},\dot{y}$ を書くと,

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} = u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = U - b(x-x_0) - 2c(y-y_0) + O(\epsilon^2) \tag{243}$$
$$\dot{y} = \frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}t} = v = \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = V + 2a(x-x_0) + b(y-y_0) + O(\epsilon^2) \tag{244}$$
$$\max(|x-x_0|,|y-y_0|) \le \epsilon \tag{245}$$

となる. $\ddot{x},\ddot{y}$ は,

$$\begin{aligned}
\ddot{x} =& \frac{\mathrm{D}\dot{x}}{\mathrm{D}t}\\
=&\dot{U} - \dot{b}(x-x_0) - b(\dot{x}-\dot{x}_0) - 2\dot{c}(y-y_0) - 2c(\dot{y}-\dot{y}_0) + O(\epsilon^2)\\
=&\dot{U} - \dot{b}(x-x_0) - 2\dot{c}(y-y_0)\\
&- b(U - b(x-x_0) - 2c(y-y_0) - U) - 2c(V + 2a(x-x_0) + b(y-y_0) - V) + O(\epsilon^2)\\
=&(-\dot{b} + b^2 - 4ac)(x-x_0) - 2\dot{c}(y-y_0) + \dot{U} + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{246}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} =& \frac{\mathrm{D}\dot{y}}{\mathrm{D}t}\\
=&\dot{V} + 2\dot{a}(x-x_0) + 2a(\dot{x}-\dot{x}_0) + \dot{b}(y-y_0) + b(\dot{y}-\dot{y}_0) + O(\epsilon^2)\\
=&\dot{V} + 2\dot{a}(x-x_0) + \dot{b}(y-y_0)\\
&+ 2a(U - b(x-x_0) - 2c(y-y_0) - U) + b(V + 2a(x-x_0) + b(y-y_0) - V) + O(\epsilon^2)\\
=&+2\dot{a}(x-x_0) + (\dot{b} + b^2 - 4ac)(y-y_0) + \dot{V} + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{247}$$

ここで,

$$W :=\sigma_{\mathrm{s}}^2 + \sigma_{\mathrm{n}}^2 - \zeta^2 \tag{248}$$
$$=4(a-c)^2 + 4b^2 - 4(a+c)^2 \tag{249}$$
$$=4(b^2-4ac) \tag{250}$$
$$=u_x^2 - 2u_xv_y + v_y^2 + v_x^2 + 2v_xu_y + u_y^2 - v_x^2 + 2u_yv_x - u_y^2 \tag{251}$$

を用いて,

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}W - \dot{b} & -2\dot{c} \\ 2\dot{a} & \frac{1}{4}W + \dot{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) \tag{252}$$
$$\ddot{\vec{x}} = \nabla\frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} + \ddot{\vec{x}}_0 + O(\epsilon^2) \tag{253}$$

と書き直せる．ここで $\nabla\frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t}$ はラグランジュ加速度勾配テンソルである．ラグランジュ加速度勾配テンソルは圧力で

$$\nabla\frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} = \begin{bmatrix} -p_{xx} & -p_{xy} \\ -p_{xy} & -p_{yy} \end{bmatrix} = -p'' \tag{254}$$

とかける．また，

$$\frac{1}{4}W - \dot{b} = -\frac{1}{2}\nabla^2 p - \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) = -p_{xx} \tag{255}$$

$$\frac{1}{4}W + \dot{b} = -\frac{1}{2}\nabla^2 p + \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) = -p_{yy} \tag{256}$$

$$2\dot{a} = -p_{xy} \tag{257}$$

$$-2\dot{c} = -p_{xy} \tag{258}$$

とも書き直せる．

$\nabla\frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t}$ の固有値 λ は，

$$\left(\frac{1}{4}W - \dot{b} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4}W + \dot{b} - \lambda\right) + 4\dot{a}\dot{c} = 0 \tag{259}$$

を解くことで，

$$\lambda = \frac{1}{4}W \pm \sqrt{\dot{b}^2 - 4\dot{a}\dot{c}} \tag{260}$$

$$= \frac{1}{4}W \pm \frac{1}{2}\sqrt{\dot{\sigma}_{\mathrm{n}}^2 + \dot{\sigma}_{\mathrm{s}}^2 - \dot{\zeta}^2} \tag{261}$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla^2 p \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}} \tag{262}$$

となる．

ラグランジュ加速度ベクトルを

$$\vec{\gamma}_{\mathrm{L}} = (\gamma_{\mathrm{L}}^x, \gamma_{\mathrm{L}}^y) \tag{263}$$

とする．これを用いると，ラグランジュ加速度勾配テンソルは

$$\nabla\vec{\gamma}_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} \partial_x\gamma_{\mathrm{L}}^x & \partial_x\gamma_{\mathrm{L}}^y \\ \partial_y\gamma_{\mathrm{L}}^x & \partial_y\gamma_{\mathrm{L}}^y \end{bmatrix} \tag{264}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_x\gamma_{\mathrm{L}}^x + \partial_y\gamma_{\mathrm{L}}^y)\mathsf{I} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\partial_x\gamma_{\mathrm{L}}^x - \partial_y\gamma_{\mathrm{L}}^y) & \partial_x\gamma_{\mathrm{L}}^y \\ \partial_y\gamma_{\mathrm{L}}^x & -\frac{1}{2}(\partial_x\gamma_{\mathrm{L}}^x - \partial_y\gamma_{\mathrm{L}}^y) \end{bmatrix} \tag{265}$$

と対称テンソルと非対称テンソルに分けることができる．対称テンソルに対応する固有値は $\frac{1}{4}W = -\frac{1}{2}\nabla^2 p$ で，非対称テンソルに対応する固有値は $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}}$ である．

ラグランジュ加速度勾配テンソル $\nabla\vec{\gamma}_{\mathrm{L}}$ と速度勾配テンソル $\mathsf{A} := \nabla\vec{u}$ の関係について述べる．準備として A,

A^2, $\dot{\mathsf{A}}$ を計算しておくと,

$$\mathsf{A} = \nabla\vec{u} = [\partial_i u_j] = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \tag{266}$$

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \tag{267}$$

$$= \begin{bmatrix} u_x^2 + v_x u_y & u_x v_x + v_x v_y \\ u_x u_y + v_y u_y & u_y v_x + v_y^2 \end{bmatrix} \tag{268}$$

$$= (-u_x v_y + v_x u_y)\mathsf{I} \tag{269}$$

$$\dot{\mathsf{A}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \tag{270}$$

$$= (-u_x v_y + v_x u_y)\mathsf{I} - p'' \tag{271}$$

$$= -\mathsf{A}^2 - p'' \tag{272}$$

となる. ここで I は単位行列である.

ラグランジュ的保存するトレーサ $C(x, y, t)$ を仮定する:

$$\dot{C} =(\partial_t + \vec{u}\cdot\nabla)C = 0 \tag{273}$$

トレーサの勾配 ∇C は,

$$\frac{\mathrm{D}C_x}{\mathrm{D}t} + u_x C_x + v_x C_y = 0 \tag{274}$$

$$\frac{\mathrm{D}C_y}{\mathrm{D}t} + u_y C_x + v_y C_y = 0 \tag{275}$$

まとめると,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla C + \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} C = 0 \tag{276}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla C + \mathsf{A}\cdot\nabla C = 0 \tag{277}$$

となる. 成分表示したトレーサ勾配のラグランジュ的時間変化にさらに $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ を作用させると,

$$\frac{\mathrm{D}^2 C_x}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}C_y + u_x\frac{\mathrm{D}C_x}{\mathrm{D}t} + v_x\frac{\mathrm{D}C_y}{\mathrm{D}t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{D}^2 C_x}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}C_y - (-u_x v_y + v_x u_y)C_x = 0$$
$$\frac{\mathrm{D}^2 C_y}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}C_y + u_y\frac{\mathrm{D}C_x}{\mathrm{D}t} + v_y\frac{\mathrm{D}C_y}{\mathrm{D}t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{D}^2 C_y}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}C_y - (-u_x v_y + v_x u_y)C_y = 0$$

となるので, まとめると,

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}\cdot\nabla C + \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla C = 0 \tag{278}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C + \dot{\mathsf{A}}\cdot\nabla C + \mathsf{A}\cdot(-\mathsf{A}\cdot\nabla C) = 0 \tag{279}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C + (\dot{\mathsf{A}} - \mathsf{A}^2)\cdot\nabla C = 0 \tag{280}$$

となる.

結局, ラグランジュ的加速度勾配テンソルは圧力あるいは速度勾配テンソルを用いて,

$$\nabla\vec{\gamma}_{\mathrm{L}} = -p'' \tag{281}$$

$$= \dot{\mathsf{A}} + \mathsf{A}^2 \tag{282}$$

と書き表せる. 流体粒子とトレーサのラグランジュ微分の 2 階微分に関する方程式を並べると,

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}(\vec{x} - \vec{x}_0) = (\dot{\mathsf{A}} + \mathsf{A}^2)(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{283}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C = (\dot{\mathsf{A}} - \mathsf{A}^2)\nabla C \tag{284}$$

である. 速度勾配テンソルの時間変化が遅い場合には $\dot{\mathsf{A}} = 0$ である. このとき, $\mathsf{A}^2 > 0$ なら流体粒子の相対位置が離れていく. 一方で, トレーサの勾配はゆるやかになる (一様化していく). 逆に $\mathsf{A}^2 < 0$ なら流体粒子の相対位置は近付き, トレーサの勾配は急になる. このようにトレーサと流体粒子の双対性が見て取れる.