第3章　基礎方程式系の基本的な適用

2 章で議論した地衡風に加えて, 速度, 圧力, 温度場の間に別の近似的な関係式が存在し, これらは圧力座標系で用いるのが便利. ゆえに, 本章の基本的な適用を導入する前に, 圧力座標系における力学方程式を導出する.

3.1　圧力座標系の基礎方程式系

3.1.1　水平運動方程式

近似的な水平運動方程式 (2.24), (2.25) は[*1]ベクトル形式で

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p \tag{3.1}$$

と表記できる[*2]. ここで, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v$ は**水平**速度ベクトル. これを圧力座標系にするため, (1.20), (1.21) を[*3]用いると,

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\nabla}_p \Phi \tag{3.2}$$

となる[*4]. ここで, $\boldsymbol{\nabla}_p$ は等圧面で適用される水平勾配演算子.

[*1]（再掲）

$$\frac{Du}{Dt} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f\left(v - v_g\right), \tag{2.24}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -f\left(u - u_g\right) \tag{2.25}$$

[*2]（原文誤植）右辺の p が添字になっていたが, 実際には添字ではない.

[*3]（再掲）

$$gdz = d\Phi = -(RT/p)dp = -RTd\ln p \tag{1.20}$$

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = g_0(Z_2 - Z_1) = R\int_{p_2}^{p_1} Td\ln p \tag{1.21}$$

[*4]1 章で導出された鉛直座標系の変換式：

$$\boldsymbol{\nabla}_s p = \boldsymbol{\nabla}_z p + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\boldsymbol{\nabla}_s z$$

p は独立な鉛直座標なので, 全微分は

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{Dx}{Dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{Dy}{Dt}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{Dp}{Dt}\frac{\partial}{\partial p} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで, $\omega \equiv Dp/Dt$（通常「オメガ」鉛直運動と呼ばれる）は, 運動にしたがう圧力変化. これは, 高度座標系において $w \equiv Dz/Dt$ が担っていたのと同じ役割を圧力座標系において担う.

(3.2) から圧力座標系での地衡風関係式は,

$$f\boldsymbol{V}_g = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\nabla}_p \Phi. \tag{3.4}$$

圧力座標系の１つの長所は, (2.23) と[*5](3.4) を比べるとわかるように, 密度が陽に現れない. 与えられたジオポテンシャルの勾配は, 任意の高度で同じ地衡風を意味する. 一方, 与えられた水平圧力勾配は, 密度に依存して地衡風が異なっているということを意味する. さらに, f を一定とすると, 等圧面での地衡風の水平発散は

$$\boldsymbol{\nabla}_p \cdot \boldsymbol{V}_g = 0$$

となる[*6].

を用いると, 圧力座標系では $s = p$ であるため, 上式は

$$0 = \boldsymbol{\nabla}_z p + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\boldsymbol{\nabla}_p z$$

となる. これに静力学関係式と (1.20) 式を等圧面で展開した式：

$$g\boldsymbol{\nabla}_p z = \boldsymbol{\nabla}_p \Phi$$

を用いると,

$$\boldsymbol{\nabla}_z p = \rho g \boldsymbol{\nabla}_p z = \rho \boldsymbol{\nabla}_p \Phi$$

となるので, 求める式が得られる.

[*5]（再掲）

$$\boldsymbol{V}_g \equiv \boldsymbol{k} \times \frac{1}{\rho f}\boldsymbol{\nabla} p \tag{2.23}$$

[*6](3.4) 式の両辺について等圧面上で水平発散をとると, f が一定であるから,

$$\boldsymbol{\nabla}_p \cdot \boldsymbol{V}_g = \frac{1}{f}\boldsymbol{\nabla}_p \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\nabla}\Phi)$$

となる. ここで, ベクトル恒等式より,

$$\boldsymbol{\nabla}_p \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\nabla}\Phi) = 0$$

であるので,

$$\boldsymbol{\nabla}_p \cdot \boldsymbol{V}_g = 0$$

が得られる.

3.1.2 連続の式

高度座標系から圧力座標系に, 連続の式 (2.31) を[*7]変形する. ラグランジュ的領域 $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ を考え, 流体要素を $\delta V = -\delta x \delta y \delta p/(\rho g)$ と表すために, 静力学の式 $\delta p = -\rho g \delta z$（ここで $\delta p < 0$ であることに注意）を適用すると, この流体要素の質量は, $\delta M = \rho \delta V = -\delta x \delta y \delta p/g$ となるので,

$$\frac{1}{\delta M}\frac{D}{Dt}(\delta M) = \frac{g}{\delta x \delta y \delta p}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\delta x \delta y \delta p}{g}\right) = 0$$

となる.

微分し, 連鎖律を用い, 微分演算子の順序を変えると[*8],

$$\frac{1}{\delta x}\delta\left(\frac{Dx}{Dt}\right) + \frac{1}{\delta y}\delta\left(\frac{Dy}{Dt}\right) + \frac{1}{\delta p}\delta\left(\frac{Dp}{Dt}\right) = 0$$

あるいは,

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta p} = 0$$

となる.

$\delta x,\ \delta y,\ \delta p \to 0$ の極限をとり, $\delta x,\ \delta y$ を等圧面で評価すると, 圧力座標における連続の式は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{3.5}$$

となる.

連続の式のこの形式は, 密度場についての情報がなく, 時間微分を含んでいない $\Rightarrow$ 圧力座標系の大きな長所の１つである.

3.1.3 熱エネルギー方程式

熱力学第一法則 (2.42) は[*9] $Dp/Dt = \omega$ とし, (3.3) を用いて, DT/Dt を展開することで, 圧力座標系の式にできる. すなわち,

$$c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \omega\frac{\partial T}{\partial p}\right) - \alpha\omega = J$$

[*7]（再掲）

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U} = 0 \tag{2.31}$$

[*8]（原文脚注）ここから g は定数とする.

[*9]（再掲）

$$c_p\frac{DT}{Dt} - \alpha\frac{Dp}{Dt} = J \tag{2.42}$$

となる．これは,

$$c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-S_p\omega=\frac{J}{c_p} \tag{3.6}$$

と書き直される．ここで, 状態方程式とポアソンの式 (2.44) を[*10]用いると,

$$S_p\equiv\frac{RT}{c_p p}-\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p} \tag{3.7}$$

となる[*11]．これは, 圧力系に対する静的安定パラメータである．(2.49) と[*12]静力学関係式を用いると, (3.7) は

$$S_p=\left(\mathit{\Gamma}_d-\mathit{\Gamma}\right)/\rho g$$

と書き直される．

したがって, 減率が乾燥断熱減率より小さいとすると, S_p は正となる．しかし, 密度が近似的に高度とともに指数関数的に減少するので, S_p は高度とともに急速に増加する．安定性の指数 S_p のこの強い高度依存性は, 圧力座標系の数少ない短所である．

[*10] （再掲）

$$\theta=T(p_s/p)^{R/c_p} \tag{2.44}$$

[*11] (2.44) を p で微分すると,

$$\frac{\partial\theta}{\partial p}=\pi\frac{\partial T}{\partial p}+T\frac{\partial\pi}{\partial p},\quad \pi\equiv\left(\frac{p_s}{p}\right)^{R/c_p}$$

となる．ここで, $\frac{\partial\pi}{\partial p}=-\frac{R\pi}{c_p p}$ であるので,

$$\frac{\partial\theta}{\partial p}=\pi\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{RT\pi}{c_p p}$$

となる．これを整理すると,

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}=\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{RT}{c_p p}$$

が得られる．

[*12] （再掲）

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\mathit{\Gamma}_d-\mathit{\Gamma} \tag{2.49}$$