

7.4 内部重力（浮力）波

ここでは、大気における重力波の伝播の性質を考える。大気重力波は安定成層をしているときのみ存在することができる。これは浮力が重力波に対して重要な復元力となるからである（図 7.1）^{*1}。

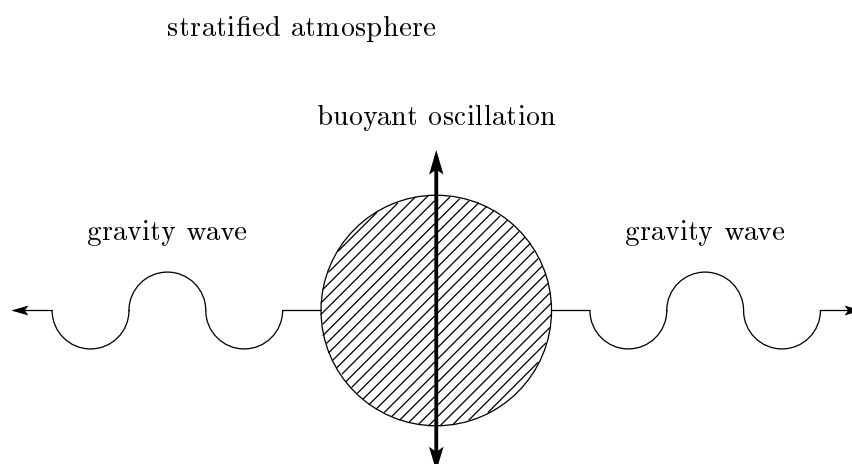


図 7.1: 安定成層大気において重力波の発生する概念図。パーセルが対流などの外力によって持ち上げられたとき、大気が安定であればパーセルは浮力振動を行う。この振動によって重力波を発生させる。

海洋のような上下の両方に境界をもつ流体では、重力波は水平面に伝播する。なぜなら、鉛直方向に移動する波は境界からの反射によって定在波を形成するからである。しかし、大気のような上部境界をもたない流体では、重力波は水平と鉛直に伝播する（図 7.2, 7.3, 7.4, 7.5）。鉛直に伝播する波において、位相は高度の関数となり、そのような波を内部波と呼ぶ。内部重力波は総観規模の気象予報ではそれほど重要ではない（し、実際フィルタリングされた準地衡流モデルにおいては存在しない）が、それらはメソスケールの運動で重要となる^{*2}。

7.4.1 純粋な内部重力波

簡単化のため、コリオリ力を無視し、 x, z 平面内で伝播する 2 次元の内部重力波を考える。このような波の振動数についての式は 2.7.3 でのパーセル法を修正することで求められる。

^{*1}浮力波という名称がこれらの波に対する名称として適当だが、本書では伝統的な名称である重力波を用いることにする

^{*2}たとえば、風下山岳波の発生、晴天乱気流（CAT）の形成に関係する。

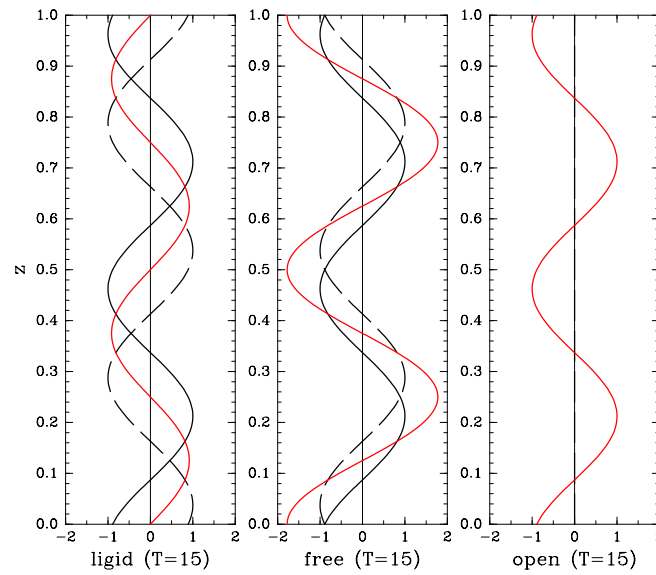


図 7.2: 下端において発生する波の伝播. 黒実線は下端から発生した波を, 黒破線は上端で反射した波, 赤線はこれらの波の重ね合わせ. 図は上端の境界条件が異なり, 左から固定端, 自由端, 放射境界を表す. 固定端, 自由端は海洋上端を, 放射境界は大気上端の境界に相当する.

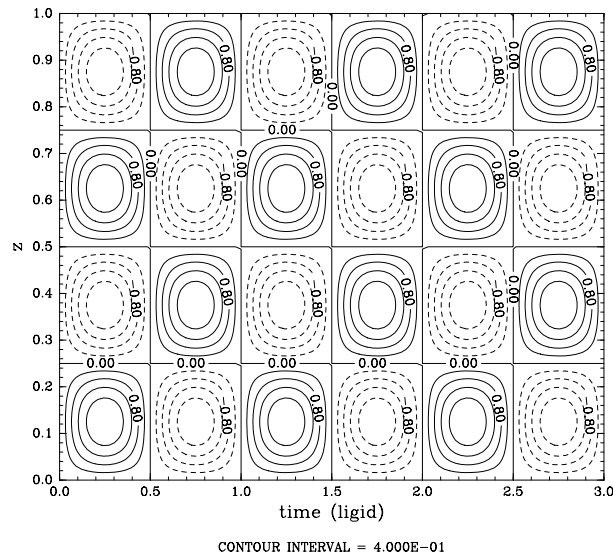


図 7.3: 図 7.2 の固定端における波 (赤線) の時系列. 等値線は波の振幅を表す. この図から海洋において鉛直伝播する波は定在波を形成する様子がわかる.

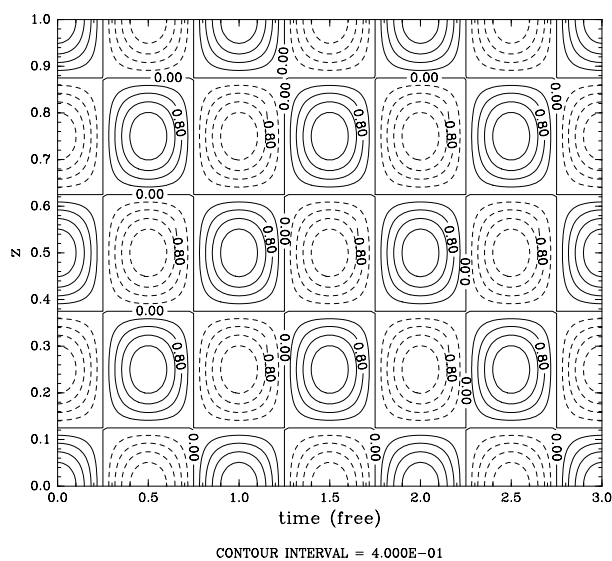


図 7.4: 図 7.3 と同じで上端境界は自由端境界. 等値線は波の振幅を表す. この図から海洋において鉛直伝播する波は定在波を形成する様子がわかる.

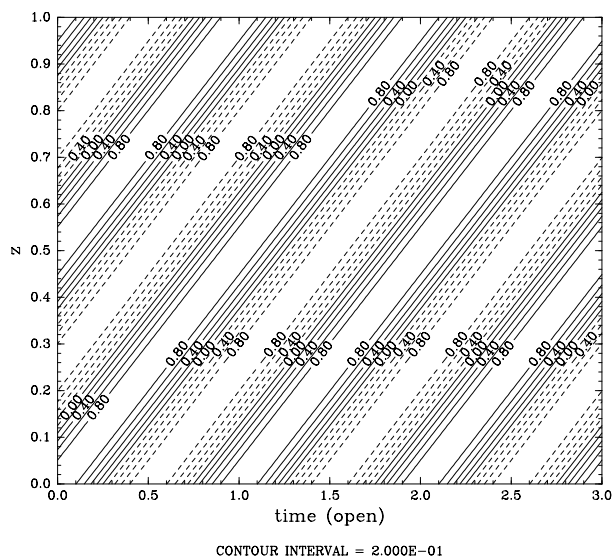


図 7.5: 図 7.3 と同じで上端境界は放射境界. この図から大気では波が鉛直伝播することがわかる.

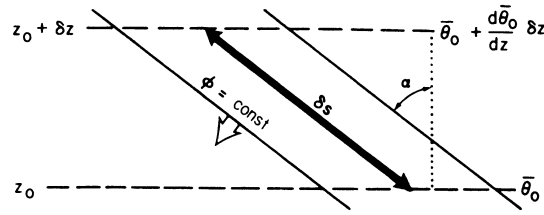


図 7.6: 鉛直方向に対して角度 α で傾く位相線をもつ純粋な重力波に対するパーセルの軌跡 (太矢印).

内部重力波は図 7.6 に示されるように、パーセルの振動が位相線に平行となる横波である。図 7.6 で示されるように、鉛直に対して角度 α で傾いている線に沿って距離 δs 変位したパーセルは、鉛直方向に $\delta z = \delta s \cos \alpha$ の変化を受ける。このようなパーセルに対して、単位質量あたりの鉛直方向の浮力はちょうど、(2.52) で^{*3}示したように、 $-N^2 \delta z$ となる。したがって、パーセルが振動する方向に沿って傾いた軌跡に平行な浮力の成分はちょうど、

$$-N^2 \delta z \cos \alpha = -N^2 (\delta s \cos \alpha) \cos \alpha = -(N \cos \alpha)^2 \delta s$$

となり、パーセルの振動に対する運動方程式は

$$\frac{d^2(\delta s)}{dt^2} = -(N \cos \alpha)^2 \delta s \tag{7.24}$$

となる。この一般解は $\delta s = \exp[\pm i(N \cos \alpha)t]$ である。ゆえに、パーセルは振動数 $\nu = N \cos \alpha$ で単振動を行う。この振動数は、(浮力振動数 N で測定された) 静的安定度および、鉛直に対する位相線のなす角にのみ依存する。

この求め方は少し発見的^{*4}であるが、2次元の内部重力波に対する線形化された方程式を考えることで同じように求められることを示そう。簡単化のために、ブシネスク近似を用いる^{*5}。局所的な密度の変化は、一定の基本状態の密度場に対して、微小であると仮定する。基本状態の密度の鉛直変化は重力項以外無視されるので、ブシネスク近似は鉛直スケールが大気スケールハイト H ($\approx 8 \text{ km}$) 以下であるような運動^{*6}に対してのみ適用される。

回転の効果を無視すると、非圧縮大気の2次元の運動に対する基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{7.25}$$

^{*3}再掲:

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\delta z) = -N^2 \delta z. \tag{2.52}$$

^{*4}最初から答えを知っていて求めるやり方。

^{*5}横波であることは非圧縮であることと等価である。

^{*6}大気が密度成層している場合、密度 ρ と高度 z には、 $\rho(z) \propto e^{-z/H}$ という関係がある。 $z < H$ では近似的に $e^{-z/H} \sim 1$ が成り立つため、ブシネスク流体とみなされるのは、大気スケールハイト以下の運動に対してのみであることがわかる。

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (7.28)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho', & u &= \bar{u} + u' \\ p &= \bar{p}(z) + p', & w &= w' \\ \theta &= \bar{\theta}(z) + \theta' \end{aligned} \quad (7.30)$$

を仮定して, (7.25) から (7.28) を線形化する. ただし, 基本場は静力学バランス:

$$d\bar{p}/dz = -\rho_0 g \quad (7.31)$$

を満たす状態を基本場と定義する. また, 簡単化のため, 基本場の東西風 \bar{u} を一定とし, ブシネスク近似の仮定から密度 ρ_0 は一定である. さらに, 圧力変化に由来する密度の変動は温度変化に由来する密度の変動より小さいという事実を用いると^{*7}, 第一近似に対して,

$$\theta'/\bar{\theta} = -\rho'/\rho_0 \quad (7.36)$$

である.

これらを用いると, 方程式系 (7.25) から (7.28) の線形化された形は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (7.37)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g = 0, \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (7.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta' + w' \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0, \quad (7.40)$$

となる. 上の方程式系は未知変数 u', w', p', θ' に対して同数の方程式が存在するので, 閉じた方程式系である. この方程式系を整理して, w' のみについての 1 つの方程式にすると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0 \quad (7.42)$$

となる^{*8}. ここで, $N^2 \equiv g d \ln \bar{\theta} / dz$ は浮力振動数の 2 乗であり, 一定と仮定する^{*9, *10}.

^{*7}この説明および, 鉛直方向の圧力傾度力の線形化は付録参照.

^{*8}導出は付録参照.

^{*9}(原文脚注) 厳密にいうと, N^2 は ρ_0 が一定であったとしても, 正確に一定とはならない. しかし, 浅い擾乱に対する高度ごとの N^2 の変化は重要ではない.

^{*10}原文脚注の証明. $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$ である. (7.32) を z で微分したものを代入して, $\bar{\theta}$ を消去すると,

$$N^2 = g \left[\frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dz} \right] = g \left[\frac{-g \rho_0}{\gamma \bar{p}} \right]$$

式 (7.42) について

$$w' = \text{Re} [\hat{w} \exp(i\phi)] = w_r \cos \phi - w_i \sin \phi \quad (7.43)$$

という形の解を仮定する。ここで、 $\hat{w} = w_r + iw_i$ は実部 w_r と虚部 w_i をもつ複素振幅、 $\phi = kx + mz - \nu t$ は位相であり、 x, t と同様に z にも線形に依存すると仮定する。ここで水平方向の波数 k は実数とするが、鉛直方向の波数 $m = m_r + im_i$ は複素数と仮定する^{*11}。このような場合、 m_r は三角関数的な変化、 m_i は指数関数的な変化をそれぞれ表す。 m が実数のとき、全波数はベクトル $\boldsymbol{\kappa} \equiv (k, m)$ とみなされる。このベクトルは等位相線に垂直に向き^{*12}、成分 $k = 2\pi/L_x$ 、 $m = 2\pi/L_z$ はそれぞれ水平、鉛直方向の波長に反比例して位相の増加する方向を向く。(7.42) に仮定された解を代入すると、分散関係式

$$(\nu - \bar{u}k)^2 (k^2 + m^2) - N^2 k^2 = 0$$

を得るので、

$$\hat{\nu} \equiv \nu - \bar{u}k = \pm Nk / (k^2 + m^2)^{1/2} = \pm Nk / |\boldsymbol{\kappa}| \quad (7.44)$$

となる。ここで、固有振動数 $\hat{\nu}$ は平均風に相対的な振動数である。この式から、平均風に相対的な振動数の符号が正のときは東向きの位相伝播を獲得し、負のときは西向きの位相の伝播を獲得する（いずれも平均風の座標系でみたとき）。

$k > 0$ 、 $m < 0$ とすると、等位相線は図 7.7 に示されるように^{*13}、高度の増加とともに東向きに傾く^{*14}。(7.44) において正の平方根をとると、 $c_x = \hat{\nu}/k$ 、 $c_z = \hat{\nu}/m$ で与えられる（平均流に相対的な）水平、鉛直位相速度をもつ。これは平均流に相対的な東向きかつ下向

となる。ここで、 ρ_0 は一定であり、最終式への変形は (7.31) を用いた。これを z で微分すると、

$$\frac{dN^2}{dz} = -\frac{g^3 \rho_0^2}{\gamma \bar{p}^2}$$

となるので、 ρ_0 が高度で一定であるとしても、 $\frac{dN^2}{dz} \neq 0$ となるので N^2 は高度で一定にならない。しかし、このときの $\frac{dN^2}{dz}$ の大きさは、 $\frac{dN^2}{dz} \sim O(10^{-7})$ となるので、 N^2 の高度変化は非常に小さいことが示される。

^{*11}現在、鉛直方向の波の伝播を考えているので、水平方向の伝播を表す k は簡単化のため実数のみを仮定する。

^{*12}波の位相を ϕ とすると、

$$\phi = kx + mz$$

であるので、これを用いると、波数ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ は

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla \phi$$

と表記できる。この式から、波数ベクトルは位相の勾配ベクトルと同じ方向、つまり、位相の等値線に垂直な方向を向く。

^{*13}各物理量が図 7.7 のような分布になる説明は付録参照。

^{*14}図 7.7 は、 $k > 0$ 、 $m < 0$ となるときに、 $\phi = kx + mz$ に対して一定の位相を保つためには、 x が増加するにつれて、 z も増加しなければならないことから明らか。

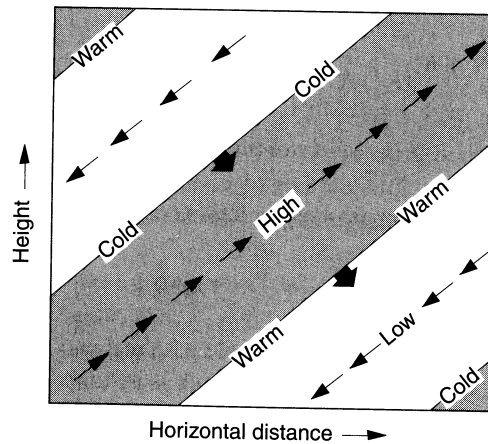


図 7.7: 内部重力波に対する圧力, 温度, 速度擾乱の位相を示す理想化された断面図. 細い矢印は速度場の擾乱を表し, 太い矢印は位相速度を表す. 影をつけた領域は上向きの運動領域である.

きの位相伝播に対応する^{*15}. しかし, 群速度 c_{gx}, c_{gz} の成分は,

$$c_{gx} = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}}, \quad (7.45a)$$

$$c_{gz} = \frac{\partial \nu}{\partial m} = \pm \frac{(-Nkm)}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \quad (7.45b)$$

で与えられる. ここで, 正負の符号は (7.44) と同様の方法で選ばれる. ゆえに, 群速度の鉛直成分は, 位相速度の鉛直成分と逆符号となる (下向きの位相伝播が上向きのエネルギー伝播を意味する). さらに, (7.45a,b) から群速度ベクトルが同位相線に平行となることが容易に示される^{*16}. したがって, 内部重力波は群速度が位相の伝播する方向に直交するという特筆すべき性質がある. なぜなら, エネルギーは群速度で伝播するので^{*17}, これはエネルギーが, 音波や浅水重力波のように波の腹や節に直交するのではなく, それらに平行に伝播するということを示唆している. 大気において, 対流圏での積雲対流や地形性の流れ, さらにほかの過程によって生成される内部重力波は, 各流体パーセルの振動が 1 km 以下の短い鉛直距離だったとしても, 中層大気にまで伝播して影響を及ぼす.

^{*15} (原文脚注) 位相速度はベクトルではないことに注意. 等位相線に垂直な方向 (すなわち, 図 7.7 における太矢印) における位相速度は $\nu/(k^2 + m^2)^{1/2}$ で与えられる. これは, $(c_x^2 + c_z^2)^{1/2}$ とは一致しない.

^{*16} 同位相線上では, 位相 ϕ の空間勾配がゼロであるので, 位相の空間勾配ベクトルは同位相線と直交する方向を向く. よって, 位相の勾配ベクトルと群速度ベクトルの内積がゼロとなることを示せば, 群速度ベクトルが同位相線に平行となることが示される. この証明は問 7.11 にあり, 付録参照.

^{*17} Pedlosky (1987) の第 3 章に密度一様な浅水方程式系でのエネルギー伝播, 第 6 章において, 密度成層した系でのエネルギー伝播について詳細に議論しており, その結果はどちらも波のエネルギーはその波の群速度で空間方向に移流されるという結論である. もっと簡単に考えると, 波のエネルギーは波の振幅の 2 乗に比例し, 波の振幅は群速度で移動することから明らかであろう.

再び図 7.7 を見ると, 鉛直方向に対する位相線の角度は

$$\cos \alpha = L_z / (L_x^2 + L_z^2)^{1/2} = \pm k / (k^2 + m^2)^{1/2} = \pm k / |\kappa|$$

によって与えられることが示される.

したがって, 先に考察した発見的なパーセルの振動モデル (7.24) と一致して, $\hat{v} = \pm N \cos \alpha$ となる (すなわち, 重力波の振動数は浮力振動数より小さくならなければならない). 内部重力波に対する位相線の傾きは, 浮力振動数に対する波の固有振動数の比のみに依存し, 波長に依存しない.

鉛直気圧傾度力の線形化

基本状態の温位は (7.29) を満たさなければならないので,

$$\ln \bar{\theta} = \gamma^{-1} \ln \bar{p} - \ln \rho_0 + \text{constant} \quad (7.32)$$

となる.

鉛直方向の気圧傾度力を線形化した方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \left(\frac{d\bar{p}}{dz} + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + g \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \frac{d\bar{p}}{dz} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + g = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0} g \end{aligned} \quad (7.33)$$

となる. ここで, (7.31) を, \bar{p} を除くために用いた. (7.29) の摂動形式は

$$\ln \left[\bar{\theta} \left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) \right] = \gamma^{-1} \ln \left[\bar{p} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) \right] - \ln \left[\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \right] + \text{const} \quad (7.34)$$

であることに注意すると得られる. ここで, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, 任意の $\varepsilon \ll 1$ に対して, $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ であることを思い出すと, (7.32) を用いて (7.34) は

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\rho_0}$$

と近似されることがわかる. ρ' に対して解くと,

$$\rho' \approx -\rho_0 \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{p'}{c_s^2} \quad (7.35)$$

となる. ここで, $c_s^2 \equiv \bar{p}\gamma/\rho_0$ は音速の 2 乗である. 浮力振動の運動に対して, $|\rho_0\theta'/\bar{\theta}| \gg |p'/c_s^2|$ ^{*18}であるので, これらから線形化した鉛直気圧傾度力は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g$$

となる.

(7.42) 式導出

元の支配方程式系は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (7.37)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g = 0, \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (7.39)$$

^{*18} $c_s^2 \sim O(10^5)$, $\bar{\theta} \sim O(10^2)$ とすると, この近似は明らかに成り立つ.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta' + w'\frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0, \quad (7.40)$$

まず, $\partial(7.38)/\partial x - \partial(7.37)/\partial z$ によって, p' を消去すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z}\right) - \frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\theta'}{\partial x} = 0 \quad (7.41)$$

. これを x で微分すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial z\partial x}\right) - \frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2} = 0.$$

さらに, $\partial(7.39)/\partial z$ をこれに代入して u' を消去すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) - \frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2} = 0.$$

この式を $\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x$ で微分すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) - \frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2} = 0$$

となるので, $\partial(7.40)/\partial x$ を代入して, θ' を消去すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + N^2\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0 \quad (7.42)$$

が得られる.

図 7.7 における各物理量の位相

支配方程式が線形であるため, 各物理量は w' のモードと同じモードのみ現れる. よって, 各物理量の解は

$$u' = \text{Re}[\hat{u} \exp(i\phi)], \quad p' = \text{Re}[\hat{p} \exp(i\phi)], \quad \theta' = \text{Re}[\hat{\theta} \exp(i\phi)]$$

という形を仮定することができる. これを (7.37) - (7.39) に代入すると,

$$\begin{pmatrix} -i\hat{\nu} & ik/\rho_0 & 0 \\ 0 & im/\rho_0 & -g/\bar{\theta} \\ ik & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\hat{\nu}\hat{w} \\ -im\hat{w} \end{pmatrix}$$

という連立方程式となるので, これを解くと,

$$\hat{u} = -\frac{m}{k}\hat{w}, \quad \hat{p} = -\hat{\nu}\frac{m\rho_0}{k^2}\hat{w}, \quad \hat{\theta} = i\hat{\nu}\frac{\bar{\theta}}{g}\left(1 + \frac{m^2}{k^2}\right)\hat{w}$$

が得られる. これらの結果から, 表にすると以下のようなになる.

この結果から, w', u', p' は同位相, θ' のみ $1/4$ 周期ずれていることがわかる.

表 7.1: $k > 0, m < 0$ のときの w' の位相を基準とした各物理量の位相関係.

物理量	位相のずれ	$w' = 0$	$w' = \pi/2$	$w' = \pi$	$w' = 3\pi/2$
w'	0	正	0	負	0
u'	0	正	0	負	0
p'	0	正	0	負	0
θ'	$+\pi/2$	0	負	0	正

問 7.11 の解答

内部重力波のエネルギー伝播方向についての練習問題 7.11 を解く.

2次元における等位相線は, 位相 $\phi = kx + mz - \nu t$ が一定となる線であるので, 位相についての空間勾配ベクトルと直交する. そこで, 等位相線上に平行に伸びるベクトルを A とすると, 位相勾配ベクトルとの関係は

$$A \cdot \nabla \phi = 0$$

でなければならない. ここで, $\nabla \equiv i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial z}$ である. 位相が $\phi = kx + mz - \nu t$ であるときの位相勾配ベクトルは

$$\nabla \phi = ik + jm$$

となる. 一方, 固有振動数 $\hat{\nu}$ に対する群速度ベクトル $C_g \equiv c_{gx}i + c_{gz}j = i \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial k} + j \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial m}$ と位相勾配ベクトルの内積は

$$\begin{aligned} C_g \cdot \nabla \phi &= k \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial k} + m \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial m} \\ &= k \frac{\partial}{\partial k} \left[\pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \right] + m \frac{\partial}{\partial m} \left[\pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \right] \\ &= k \left[\pm N \frac{(k^2 + m^2)^{1/2} - k^2 (k^2 + m^2)^{-1/2}}{(k^2 + m^2)} \right] + Nkm \left[\mp \frac{m}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right] \\ &= k \left[\pm N \frac{m^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right] + Nkm \left[\mp \frac{m}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. ここで, 第2段の式変形には, (7.44) 式を用いた. よって, 群速度ベクトルは位相勾配ベクトルと直交するので, 等位相線上に平行なベクトルとなることがわかる.