

8.4.3 イーディーの安定性問題

本節では、前の小節で与えられた連続成層大気での不安定に対する必要条件を満たす、もっとも簡単なモデルでの不安定モードについて、構造（固有関数）と成長率（固有値）を解析する。簡単化のため、以下のような仮定をおく。

イーディー問題の設定

- (i) 基本場の密度は一定。（ブシネスク近似）
- (ii) f 面近似。（ $\beta = 0$ ）
- (iii) $\partial\bar{u}/\partial z^* = \Lambda = \text{constant}$.
- (iv) $z^* = 0, H$ で剛体の蓋。

これらの条件は非常に近似が多いが、鉛直構造の水平スケールと安定性への移存性を検証するのに十分な第一近似である^{*1}。領域内では平均ポテンシャル渦度がゼロであるが、イーディーモデルは前小節で議論した不安定性に対する必要条件を満たしている^{*2}。

上の仮定を用いると、準地衡風ポテンシャル渦度方程式（ジオポテンシャル構造を記述する方程式）と熱エネルギー方程式（上下での境界条件を与える方程式）は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\nabla^2\psi' + \varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^{*2}}\right) = 0, \quad (8.62)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial\psi'}{\partial z^*} - \frac{\partial\psi'}{\partial x} \frac{\partial\bar{u}}{\partial z^*} + w^* \frac{N^2}{f_0} = 0 \quad (8.63)$$

となる。以前と同じく、 $\varepsilon \equiv f_0^2/N^2$ である。このとき、擾乱のジオポテンシャルが水平方向に波型：

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, z^*, t) &= \Psi(z^*) \cos ly \exp[ik(x - ct)] \\ \bar{u}(z^*) &= \Lambda z^* \end{aligned} \quad (8.64)$$

と仮定する。ここで、 $\Psi(z^*)$ は複素振幅、 c は複素位相速度である。(8.64) を (8.62) に代入すると、

$$\boxed{d^2\Psi/dz^{*2} - \alpha^2\Psi = 0} \quad (8.65)$$

となり、この 2 階の微分方程式の解が波の鉛直構造を与える。ここで、 $\alpha^2 = (k^2 + l^2)/\varepsilon$ である。同様に、(8.63) からは地表面 ($z^* = 0$) と対流圏界面 ($z^* = H$) での剛体水平境界 ($w^* = 0$) 条件

$$\boxed{(\Lambda z^* - c) d\Psi/dz^* - \Psi\Lambda = 0, \quad \text{at } z^* = 0, H} \quad (8.66)$$

^{*1}実は本文には明記されていないが、以下でジオポテンシャルの波動解を考える際、 y 方向には $\cos ly$ で分布しているので y 方向には有限距離、 x 方向には無限遠のチャンネルを仮定している。

^{*2}イーディーモデルが不安定性の必要条件を満たすことは付録に示す。

が得られる.

(8.65) の一般解は

$$\boxed{\Psi(z^*) = A \sinh \alpha z^* + B \cosh \alpha z^*} \quad (8.67)$$

という式で表記できる. (8.67) を境界条件 (8.66) に代入すると, 振幅の係数 A, B における 2 つの線形同次方程式

$$\begin{aligned} -c\alpha A - B\Lambda &= 0 \\ \alpha(\Lambda H - c)(A \cosh \alpha H + B \sinh \alpha H) - \Lambda(A \sinh \alpha H + B \cosh \alpha H) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる. 2 層モデルと同様に, 非自明な解は A, B の係数の行列式がゼロである場合にのみ存在する. その条件における位相速度 c は

$$c = c_r + ic_i = \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda H}{2} \left[1 - \frac{4 \cosh \alpha H}{\alpha H \sinh \alpha H} + \frac{4}{\alpha^2 H^2} \right]^{1/2} \quad (8.68)$$

となる^{*3}. 位相速度 c は, 上式の平方根の中が正ならば実数, 負ならば複素数となる. ゆえに,

$$\boxed{1 - \frac{4 \cosh \alpha H}{\alpha H \sinh \alpha H} + \frac{4}{\alpha^2 H^2} < 0} \Rightarrow c_i \neq 0$$

となるとき, 流れは傾圧的に不安定である. また,

$$\boxed{1 - \frac{4 \cosh \alpha H}{\alpha H \sinh \alpha H} + \frac{4}{\alpha^2 H^2} = 0} \Rightarrow c_i = 0$$

であれば, その流れは中立安定である. この中立条件は $\alpha = \alpha_c$ となるときに発生する (この値を臨界値と呼ぶ). つまり,

$$\alpha_c^2 H^2 / 4 - \alpha_c H (\tanh \alpha_c H)^{-1} + 1 = 0 \quad (8.69)$$

となる. 恒等式

$$\tanh \alpha_c H = 2 \tanh \left(\frac{\alpha_c H}{2} \right) / \left[1 + \tanh^2 \left(\frac{\alpha_c H}{2} \right) \right]$$

を用いると, (8.69) は

$$\left[\frac{\alpha_c H}{2} - \tanh \left(\frac{\alpha_c H}{2} \right) \right] \left[\frac{\alpha_c H}{2} - \coth \left(\frac{\alpha_c H}{2} \right) \right] = 0 \quad (8.70)$$

となる. ここで,

$$\frac{\alpha_c H}{2} - \tanh \left(\frac{\alpha_c H}{2} \right) > 0$$

^{*3}位相速度の導出は付録参照.

であるので^{*4}, (8.70) は

$$\frac{\alpha_c H}{2} - \coth\left(\frac{\alpha_c H}{2}\right) = 0$$

となるときに満たされる. ゆえに, α の臨界値は $\alpha_c H/2 = \coth(\alpha_c H/2)$ で与えられる. これは, $\alpha_c H \cong 2.4$ に相当する^{*5}. したがって, 不安定であるには, $\alpha < \alpha_c$ あるいは,

$$(k^2 + l^2) < (\alpha_c^2 f_0^2 / N^2) = \alpha_c^2 H^2 / L_R^2 \approx 5.76 / L_R^2$$

であることが要求される. ここで, $L_R \equiv NH/f_0 \approx 1000$ km は^{*6}連続的な成層流体に対するロスビー変形半径である (これは (??) で定義された λ^{-1} と同じもの). 東西, 子午面方向の波数が等しい ($k = l$) 波について, 最大の成長率となる波長は

$$L_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\varepsilon\alpha_m} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{f_0^2/N^2\alpha_m} = 2\sqrt{2}\pi L_R / (H\alpha_m) \cong 5500 \text{ km}$$

となるということがわかる^{*7}. ここで, α_m は kc_i が最大となるときの α の値である^{*8}.

α のこの値を流線関数の鉛直構造に対する解 (8.67) に代入し, 下部境界条件を用いると, もっとも不安定なモードの鉛直構造を決定できる. 図 8.10 から, 以下のことがわかる. 不安定成長する傾圧波動は

- (i) トラフとリッジの軸が高度とともに西に傾く.
- (ii) 暖気核と寒気核の軸は高度とともに東に傾く.
- (iii) 上層のトラフの軸の東で, $w' > 0$, $v' > 0$ となる.
- (iv) (iii) から, トラフの東西 ($\theta' > 0$, $\theta' < 0$) でのパーセルの軌跡は
 - $\theta' > 0$ で極向きかつ上向き,
 - $\theta' < 0$ で赤道向き, かつ下向きとなる.

^{*4} $\frac{\alpha_c H}{2} - \tanh\left(\frac{\alpha_c H}{2}\right)$ は $\alpha H > 0$ であることから, この範囲ではゼロの値を持たないことを示す. まず,

$$f(x) = x - \tanh x$$

という関数を考えたとき, $x \rightarrow 0, \infty$ という極限における $\tanh x$ の漸近値を考えると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tanh x \approx x - 2x^3$$

となるので, $f(x)$ 自体は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2x^3$$

となる. よって, $f(x)$ は $x > 0$ の範囲でゼロにならないことが示される.

^{*5} 二分法で計算すると, $\approx 2.399357 \dots$ である.

^{*6} $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $H \sim 10 \text{ km}$, $f_0 \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ なら, その程度である.

^{*7} 導出は付録参照.

^{*8} イーディー問題における成長率の波数依存性および, 位相速度の波数依存性については付録で議論している.

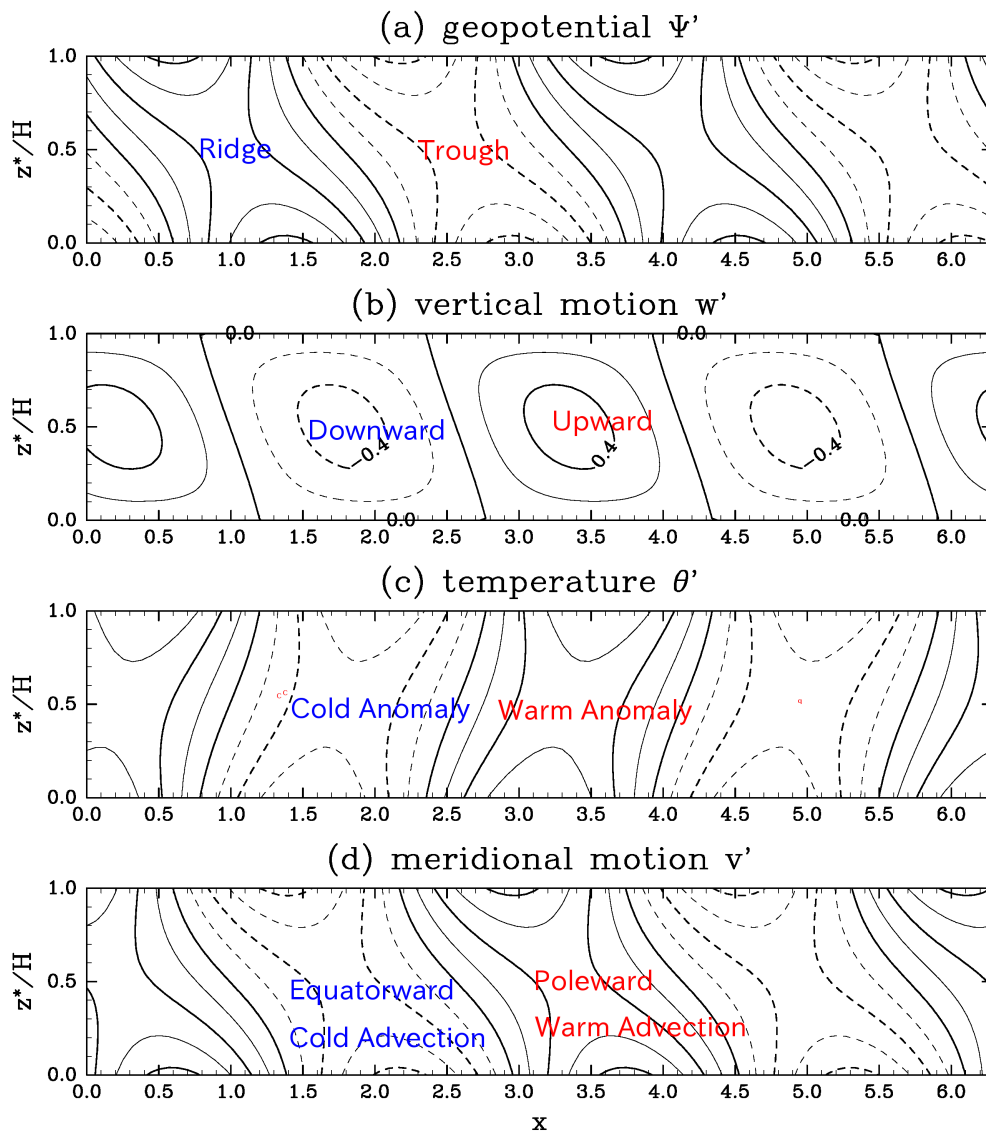


図 8.10: もっとも不安定なイーディー波の性質. (a) 擾乱のジオポテンシャルの等値線, (b) 鉛直速度の等値線, (c) 擾乱の等温線, (d) 擾乱の子午面風成分. 全ての図において, 1 と $1/4$ 波長分を示す.

(i) は 2 層モデル等の結果から得られている事実と整合的である. しかし, (ii) は 2 層モデルから得られなかった事実である. なぜなら, 2 層モデルでは, 温度がある 1 つの高度で与えられていたからである. (iii) および, そこからわかるパーセルの軌跡 (iv) から, 両方の場合とも $\overline{w'\theta'} > 0$, $\overline{v'\theta'} > 0$ となる正の相関をもつので, 図 8.8 の実線矢印で示されているような, 平均場からエネルギーを引き抜くパーセルの傾斜と一致する.

イーデー問題が不安定条件を満たすことの証明
平均場のポテンシャル渦度

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \right) \quad (8.49)$$

は今, $\beta = 0$ で平均風が水平変化せず, また鉛直シア-の値は一定で ε も一定であることから明らかに $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0$ である. ここでは鉛直方向に有限であるので, 先に求めたレイリーの不安定必要条件を満たすためには, (??) の上端を $z^* = H$ で置き直した形:

$$\begin{aligned} \int_0^H \left[\Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial y} - \Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right]_{-L}^{+L} \rho_0 dz^* + \int_{-L}^{+L} \left[\varepsilon \rho_0 \left(\Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial z^*} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial z^*} \right) \right]_0^H dy \\ = \int_{-L}^{+L} \int_0^H \rho_0 \delta_i \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} (\Psi_i^2 + \Psi_r^2) dy dz^* \end{aligned} \quad (8.60')$$

を満たさなければならない. 本文と同様の議論で (8.60') の左辺第一項はゼロであるので, イーデー問題の不安定必要条件は,

$$c_i \left[\int_{-L}^{+L} \int_0^H \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy dz^* + \int_{-L}^{+L} \left[\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \right]_0^H dy \right] = 0 \quad (8.61')$$

を $c_i \neq 0$ が満たせばよいことになる. つまり,

$$\int_{-L}^{+L} \int_0^H \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy dz^* + \int_{-L}^{+L} \left[\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \right]_0^H dy = 0$$

が成り立てば, イーデー問題の設定において不安定波が発生することになる. 先に示したとおり, $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0$ であるので, 上式左辺は

$$\text{l.h.s.} = \int_{-L}^{+L} \left[\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \right]_0^H dy$$

となる. 今, 鉛直シア- $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} = \Lambda$ は一定であるため,

$$\text{l.h.s.} = \int_{-L}^{+L} \varepsilon \Lambda \left[\frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \Big|_{z^*=H} - \frac{\rho_0 |\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \Big|_{z^*=0} \right] dy = 0$$

を満たす可能性がある*9. ゆえに, イーデー問題はレイリーの不安定条件を満たす.

Eady 問題の固有方程式の導出

z についての構造方程式から固定端境界を満たす複素位相速度の条件を求める. (8.67) を (8.66) に代入して得られる 2 つの線形方程式

$$-c\alpha A - B\Lambda = 0$$

$$\alpha(\Lambda H - c)(A \cosh \alpha H + B \sinh \alpha H) - \Lambda(A \sinh \alpha H + B \cosh \alpha H) = 0$$

9 z^ についての被積分関数が $z^* = 0, H$ でどちらも正値であるため.

について、非自明な ($A \neq 0, B \neq 0$) 解は上式を

$$\begin{pmatrix} c\alpha & \Lambda \\ \alpha(\Lambda H - c) \cosh \alpha H - \Lambda \sinh \alpha H & \alpha(\Lambda H - c) \sinh \alpha H - \Lambda \cosh \alpha H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

という行列形式に変形し、2 次の正方行列の行列式がゼロとなればよい。よって、

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} c\alpha & \Lambda \\ \alpha(\Lambda H - c) \cosh \alpha H - \Lambda \sinh \alpha H & \alpha(\Lambda H - c) \sinh \alpha H - \Lambda \cosh \alpha H \end{vmatrix} \\ &= c\alpha \{ \alpha(\Lambda H - c) \sinh \alpha H - \Lambda \cosh \alpha H \} - \Lambda \{ \alpha(\Lambda H - c) \cosh \alpha H - \Lambda \sinh \alpha H \} \\ &= -c^2 \alpha^2 \sinh \alpha H + c\alpha^2 \Lambda H \sinh \alpha H - \Lambda^2 \{ \alpha H \cosh \alpha H - \sinh \alpha H \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

という式を満たす c が、この方程式系で固定端境界条件を満たす c である。上式を c について解くと、求める根

$$\begin{aligned} c &= \frac{\Lambda H \pm \sqrt{(\Lambda H)^2 - 4(\Lambda/\alpha)^2 \{ \alpha H \tanh^{-1} \alpha H - 1 \}}}{2} \\ &= \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda H}{2} \left[1 - \frac{4 \cosh \alpha H}{\alpha H \sinh \alpha H} + \frac{4}{\alpha^2 H^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

が得られる。

Eady 問題での最大成長波長の導出

Eady 問題でのモードは

$$c = c_r + ic_i = \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda H}{2} \left[1 - \frac{4 \cosh \alpha H}{\alpha H \sinh \alpha H} + \frac{4}{\alpha^2 H^2} \right]^{1/2} \quad (8.68)$$

で与えられており、ここで c_r, c_i はそれぞれ位相速度の実部、虚部を表す。すると、波の成長率は kc_i で与えられるので、成長率が最大となる波長は

$$\frac{\partial}{\partial k}(kc_i) = 0$$

となるときの $k = k_m$ に対応した波長 L_m となる。以下では、上式を具体的に計算し、最大成長波長を導出する。

まず、計算の簡単化のため、

$$\frac{\partial}{\partial k}(kc_i) = c_i + k \frac{\partial c_i}{\partial k} = c_i + \frac{k}{2c_i} \frac{\partial c_i^2}{\partial k} = 0$$

となることを用いる。ここで、

$$\frac{\partial c_i^2}{\partial k} = 2c_i \frac{\partial c_i}{\partial k}$$

となることを用いた. すると, 求める方程式は

$$2c_i^2 + k \frac{\partial c_i^2}{\partial k} = 0 \quad (\text{ap8.68.1})$$

に帰着できる. さらに, (8.68) が αH で表現されているので, $k = l$ の波については

$$\begin{aligned} \alpha H &= \sqrt{2} \frac{kNH}{f_0} \\ \Rightarrow k &= \frac{f_0}{\sqrt{2}NH} \alpha H \end{aligned} \quad (\text{ap8.68.2})$$

となる. よって,

$$\frac{\partial}{\partial k}(\alpha H) = \sqrt{2} \frac{NH}{f_0} \quad (\text{ap8.68.3})$$

という関係が得られる. (ap8.68.2), (ap8.68.3) を用いると, (ap8.68.1) は

$$2c_i^2 + \alpha H \frac{\partial c_i^2}{\partial(\alpha H)} = 0 \quad (\text{ap8.68.4})$$

となる.

(8.68) から c_i^2 は

$$c_i^2 = 1 - \frac{4 \cosh \alpha H}{\alpha H \sinh \alpha H} + \frac{4}{\alpha^2 H^2}$$

である. $\alpha H = x$ とすると,

$$c_i^2 = 1 - \frac{4 \cosh x}{x \sinh x} + \frac{4}{x^2}$$

となる. これを用いて, $\frac{\partial c_i^2}{\partial x}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i^2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \frac{4 \cosh x}{x \sinh x} + \frac{4}{x^2} \right] \\ &= -4 \frac{x \sinh^2 x - \cosh x (\sinh x + x \cosh x)}{(x \sinh x)^2} - \frac{8}{x^3} \end{aligned}$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を用いると,

$$\begin{aligned} &= -4 \frac{-x - \cosh x \sinh x}{(x \sinh x)^2} - \frac{8}{x^3} \\ &= -4 \frac{-x^2 - x \cosh x \sinh x + 2 \sinh^2 x}{x^3 \sinh^2 x} \end{aligned}$$

が得られる. この結果と c_i^2 を (ap8.68.4) に代入して, $\alpha H = x$ で表すと,

$$2 \left[1 - \frac{4 \cosh x}{x \sinh x} + \frac{4}{x^2} \right] - 4 \frac{-x^2 - x \cosh x \sinh x + 2 \sinh^2 x}{x^2 \sinh^2 x} = 0$$

となる. 整理して,

$$\frac{2x^2 \sinh^2 x - 4x \cosh x \sinh x + 4x^2}{x^2 \sinh^2 x} = 0$$

が得られる。分母は非ゼロの正数なので、分子を計算すれば x についての根が得られる。つまり、

$$2x^2 \sinh^2 x - 4x \cosh x \sinh x + 4x^2 = 0$$

を計算すればよい。上式は

$$x(x \sinh^2 x - 2 \cosh x \sinh x + 2x) = 0$$

とできる。 $x = \alpha H = 0$ は自明なのでここでは考えない。よって、

$$x \sinh^2 x - 2 \cosh x \sinh x + 2x = 0 \quad (\text{ap8.68.5})$$

の根が求めるべき x である。上式は数値的にしか求められないので、二分法を用いて計算すると、

$$x_m = \alpha_m H \approx 1.606 \dots$$

となる。ここで、添字 m は成長率が最大のときの各物理量を表す。本文より、

$$L_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\varepsilon\alpha_m} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{f_0^2 N^2 \alpha_m} = 2\sqrt{2}\pi L_R / (H\alpha_m)$$

であるので、 $L_R \approx 1000 \text{ km}$ のとき、

$$L_m \cong 5500 \text{ km}$$

となる。2層モデルの最大不安定波の波長はおよそ 4,000 km であったのに対し、少し波長は伸びているが、オーダーとしては2層モデルと同じ典型的な総観スケールの擾乱に相当することがわかる。

イーディー問題における波の成長率の考察

図 8.11 は、Eady モードの成長率についての水平波数に対する依存性を示した図である。この図から明らかなように、南北方向に一樣な擾乱のとき、もっとも不安定なモードが発達するが、現実の状態ではそのような波が発生することはまれである。

ここで注意しなければならないことがある。原文で求めた最大値は東西波数と南北波数の間に $k = l$ という関係が成り立つような波についての最大成長率であった。しかし、これは単純に図 8.11 において第一象限の横軸となす角が 45° の直線上の最大値を求めたことにはならない。なぜなら、本文では成長率を kc_i ではなく、 αc_i で定義しているため、成長率の分布は図 8.11 に一致しないからである。 α は水平波数に比例するので、 αc_i で定義した成長率は原点を中心にした同心円上の分布になる。この操作によって、 k 軸上の成長率で議論しても一般性を失わないことになる^{*10}。

図 8.12 は、Eady 解の位相速度と成長率についての東西波数に対する依存性を示した図である。下の図は図 8.11 について、 $k > 0$ のときの横軸上の成長率をプロットしたものに一致する。この図から明らかなように、イーディー解は臨界波数より外側に不安定波を持

^{*10}つまり、東西波数と南北波数がどのような関係をもっている、図 8.12 の下で議論できるということ。

たない。つまり、臨界波長より長いスケールの波を持たない。これを short wave cut-off といい、イーディー解の特徴の1つである。また、臨界波数より大きいモードでは、東西位相速度が2種類現れる。黒線が不安定波由来、赤線が減衰波由来である。不安定領域ではどのモードでも位相速度が同一であることに注意。不安定波では $\frac{\partial c_r}{\partial k} = 0$ であるから、群速度をもたない非分散性波動となる。

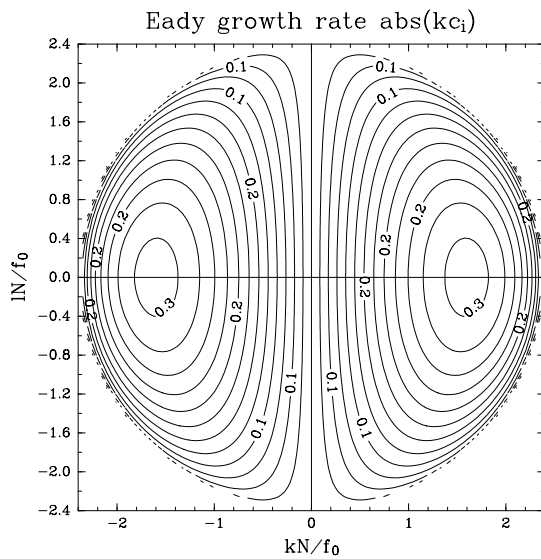


図 8.11: Eady モードにおける成長率の水平波数依存性。図は $|kc_i|$ を記述したものであり、波数は臨界値付近までの値を示している。

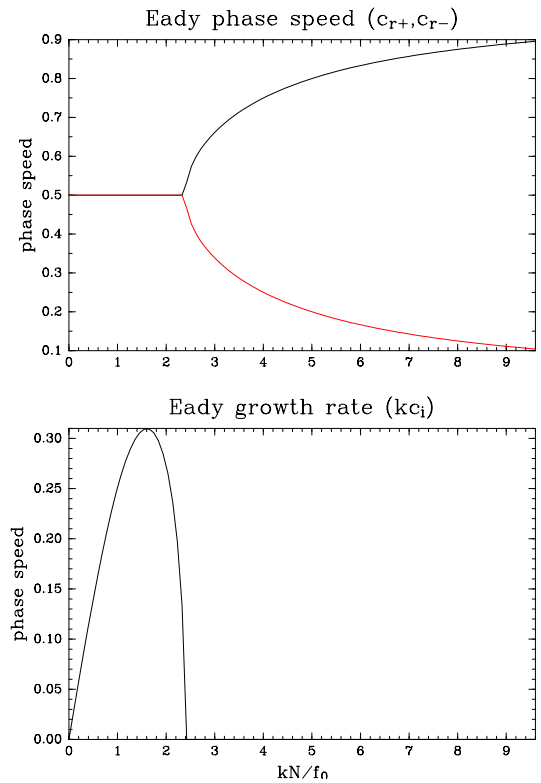


図 8.12: Eady モードにおける位相速度の東西波数依存性（上）と成長率の依存性（下）。

Eady 問題の最大成長率不安定波の構造

先の付録で得た Eady 問題の最大成長率をもつ波長 α_m についての波の構造を求める。(8.67) より、下部境界条件から得られる係数の関係を用いて書き直すと、

$$\Psi(z^*) = A \sinh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} A \cosh \alpha_m z^*$$

となる。この最大値は $k = l$ となる時のものであるため、実際の波の解は (8.64) より、

$$\psi'(x, y, z^*, t) = A \left[\sinh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \cosh \alpha_m z^* \right] \exp [ik_m(x + y - ct)]$$

となる. ここで, y 方向の波の構造は以下の議論で行わないため, $\cos k_m y \rightarrow e^{ik_m y}$ とした. これが, ジオポテンシャルの構造である. 水平風 u', v' と温度 T' はジオポテンシャルから,

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} = -iAk_m \left[\sinh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \cosh \alpha_m z^* \right] \exp [ik_m(x + y - ct)] = -ik_m \psi'$$

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = iAk_m \left[\sinh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \cosh \alpha_m z^* \right] \exp [ik_m(x + y - ct)] = ik_m \psi'$$

$$T' = \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} = A\alpha_m \left[\cosh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \sinh \alpha_m z^* \right] \exp [ik_m(x + y - ct)]$$

となる. また, 鉛直風 w^* は (8.63) を変形して,

$$\begin{aligned} w^* &= -\frac{f_0}{N^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} - \Lambda \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right] \\ &= -\frac{f_0}{N^2} \left[(-ikc + ik\Lambda z^*) A\alpha_m \left\{ \cosh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \sinh \alpha_m z^* \right\} \exp [ik_m(x + y - ct)] - ik_m \Lambda \psi' \right] \\ &= -ik_m A \frac{f_0}{N^2} \left[(-c + \Lambda z^*) \alpha_m \left\{ \cosh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \sinh \alpha_m z^* \right\} - \Lambda \left\{ \sinh \alpha_m z^* - \frac{c\alpha_m}{\Lambda} \cosh \alpha_m z^* \right\} \right] \\ &\quad \times \exp [ik_m(x + y - ct)] \end{aligned}$$

となる. これらが, イーディー問題の最大成長率となるモードでの大気の構造である. これらを図に示したのが, 図 8.10 である.